数理解析研究所講究録
169巻 1972年 49-112

不変部分空間に関する最近の話題
無限多重連結領域上の正則函数のイデアル
及び部分加群に関する C. W. Neville の結果

茨城大 理　荷見守助

単位開円板 $\Delta=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 上の Hardy 族 $H^2(\Delta)$ の不変部分空間（即ち，閉部分空間 $\mathfrak{M}$ で $z\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$ なるもの）に関する Beurling [1] の次の結果は有名である。

定理．(a) $H^2(\Delta)$ の閉部分空間 $\mathfrak{M}$ が不変なる為の条件は，$\mathfrak{M}=q H^2(\Delta)$ （q は内部函数 (inner function)）の形に書けることである．

(b) $f\in H^2(\Delta)$ から生成された $H^2(\Delta)$ の不変部分空間が $H^2(\Delta)$ に等しい為の条件は、f が外部函数 (outer function) なることである。

此定理は、1950年代の末から1960年代の前半にかけて大いに研究され、函数環論の発展に寄与した。Dirichlet 環，log-modular 環，表現測度が一意な準同型の研究等が此頃に現はれた。また、複連結領域（特に、有限 Riemann 面）への拡張も論ぜられた。此辺の事柄は筆者の報告 [4] の中にも簡単に

述べられてゐる。其後、有限複連結領域の話の一般論として表現測度の集合が有限次元な準同型が詳しく調べられた(例へば、Gamelin [3] 参照)。しかし、無限連結領域に関しては函数環からの研究はあまりないから、此処ではC. W. Neville [5] の結果を紹介したいと思ふ。今後の問題が相当ある分野と思はれる。

§1. Inner-outer 分解.

Δ を単位開円板, $H^p(\Delta)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ を Δ 上の正則函数の作る Hardy 族とする。良く知られてゐる様に, $f(\neq 0) \in H^p(\Delta)$ は $f = qF$ なる inner-outer 分解を持つ. 此処で, q は inner, F は outer で, q と F は絶対値1の定数因子を除けば一意に決定される。絶対値の対数をとれば、$\log|f| = \log|q| + \log|F|$ を得る。此処で、$\log|q(z)| \leq 0$ $(z \in \Delta)$, $\log|q^*(e^{i\theta})| = 0$ a.e. ($e^{i\theta} \in \partial\Delta$, q^* は q の境界値を表はす), 更に $\log|q(z)|$ は高々可算個の対数的特異点を別とすれば、Δ 上で調和である。又、

$$\log|F(z)| = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \log|f^*(e^{it})| \frac{dt}{2\pi} \qquad (z = re^{i\theta}),$$

$P_r(\theta) = (1-r^2)/(1-2r\cos\theta + r^2)$ は Poisson 核である. $\log|q|$ と $\log|F|$ は次の事実により見分けられる.

定理 1.1. (a) Δ 上の有界調和函数 s が $0 \leq s \leq -\log|q|$

を満せば，$s=0$．　(b) $\log|F|\neq 0$ を假定し，KはΔ上の調和函数で，$K\geqq|\log|F||$ を満すものとすれば，Δ上の0でない有界調和函数sで，$0\leqq s\leqq K$を満すものが存在する。

証明．(a)有界調和函数sは，境界値s^*のPoisson積分で表はされる．即ち，$s(z)=\int P_r(\theta-t)s^*(e^{it})dt/2\pi$　$(z=re^{i\theta}\in\Delta)$．$\log|q^*|=0$ a.e. であるから，$0\leqq s\leqq-\log|q|$ より $s^*=0$ a.e. となり，$s=0$．　(b) Kに対する假定から，$K^*\geqq|\log|f^*||$ a.e. 其処で、$s^*(e^{it})=\min(|\log|f(e^{it})||,1)$ と置き，sを上の式で定義すれば，$s\neq 0$，$0\leqq s\leqq K$ を満足する．

さて、平面領域Dに対し，D上の二個の非負調和函数の差の形に書ける調和函数の全体を $HP'(D)$ と書く．Dの疎な部分集合の全体を $\mathfrak{Z}_D$ と書く．$HP'(D)$ はpointwiseな演算に関してベクトル束をなすが，詳しくは，本講究録の林先生の論文，Constantinescu-Cornea [2]等を参照されたい。

Rを有界平面領域とする。$u_j\in HP'(R\sim Z_j)$，$Z_j\in\mathfrak{Z}_R$，$j=1,2$，に対し，$Z_3\in\mathfrak{Z}_R$で $Z_3\supseteqq Z_1\cup Z_2$ 且つ $u_1(z)=u_2(z)$，$\forall z\in R\sim Z_3$，なるものが存在する時，u_1とu_2を同一視する．$\cup\{HP'(R\sim Z): Z\in\mathfrak{Z}_R\}$から此同一視によって得られる集合を$SP(R)$と書く．

$u\in HP'(R\sim Z)$ 且つ $a\in Z$ とすれば，aはuの除去可能な特異点であるか，又は、或位数の対数的特異点である．此処で、調和函数uが点$a\in R$で位数αの対数的特異点を持つとは、

a が $u(z)+\alpha \log|z-a|$ の除去可能な特異点である事を云ふ。

定理1.2. $SP(R)$ は pointwise な演算に関してベクトル束をなす。しかも，$SP(R)$ はベクトル束として完備である．

証明. $u\in HP'(R\sim Z)$ に対し，$\hat{u}$ により u の属する $SP(R)$ の元を表はす。$SP(R)$ 内の代数演算を次のやうに定義する。$\hat{u}_i \in SP(R)$, $i=1,2$, の代表元 $u_i \in HP'(R\sim Z_i)$ を任意に取る。$Z_3=Z_1\cup Z_2$ と置けば，$u_i \in HP'(R\sim Z_3)$ と看做されるから，u_1+u_2 と $u_1\vee u_2$ が $HP'(R\sim Z_3)$ で定義される。其処で，$\hat{u}_1+\hat{u}_2=\widehat{(u_1+u_2)}$, $\hat{u}_1\vee\hat{u}_2=(u_1\vee u_2)^\wedge$ と定義する。此等の演算が代表元の取り方に無関係である事，$SP(R)$ が完備ベクトル束をなす事は，$HP'(R\sim Z)$ の諸性質から簡単に導き出すことが出来る。

さて，$u\in SP(R)$ に対して，$\|u\|=u\vee(-u)$ と置く。$A\subset SP(R)$ に対し，$A^\perp=\{u\in SP(R):\ a\in A \Rightarrow \|u\|\wedge\|a\|=0\}$ と置く。

定義 1. $\mathcal{I}(R)=\{1\}^\perp$, $\mathcal{Q}(R)=\mathcal{I}(R)^\perp=\{1\}^{\perp\perp}$.

此時，ベクトル束の一般論から次の結論が得られる。

定理 1.3. $\mathcal{I}(R)$, $\mathcal{Q}(R)$ は $SP(R)$ の完備部分束で且つ順序イデアルであり．$SP(R)=\mathcal{I}(R)\oplus\mathcal{Q}(R)$ が成立つ。此直交分解に附随した射影を P_I, P_Q と書けば，P_I, P_Q は正である。

此処で，ベクトル束 $\mathcal{V}$ の部分集合 A が順序イデアルであるとは，$u\in\mathcal{V}$, $w\in A$ 且つ $\|u\|\leqq\|w\| \Rightarrow u\in A$ なる事である。

定義 2. $u\in SP(R)$ に対し，$P_I(u)$, $P_Q(u)$ を夫々 u の内部部

分(inner part)，外部部分(outer part)と呼ぶ。此等を u_I, u_Q とも書く。

定理 1.4. 任意の $u \in SP(R)$ に対し，外部部分 u_Q は除去不可能な特異点を持たない。従て u と u_I は同一の特異点を持つ。

証明 $u \geqq 0$ と假定しても一般性を失はない。其処で，$u_n = u \wedge n$, $n = 1, 2, \cdots$，と置くと，u_n は R 上で有界で，従て R 上で調和である。函数列 $\{u_n\}$ は単調増加で，優調和な u を優函数に持つ。従て，$\lim_{n\to\infty} u_n$ ($= v$ と置く)が存在し，R 上で調和である。$v = u_Q$ を示す。$s \in \mathcal{I}(R)$ とすれば，$\|u_n\| \wedge \|s\| = u_n \wedge \|s\| = (u \wedge n) \wedge \|s\| = u \wedge (n \wedge \|s\|) = 0$ であるから，$u_n \in \mathcal{Q}(R)$. $\mathcal{Q}(R)$ は完備部分束であるから，$v \in \mathcal{Q}(R)$。一方，$(u - v) \wedge 1 = 0$ である。実際，$w = (u - v) \wedge 1$ と置く。此時，$w \leqq u - v \leqq u - u_n$ 且つ $w \leqq 1$。従て，$w + u_n = w + (u \wedge n) \leqq n + 1$ となり，$w + u_n \leqq u \wedge (n+1) = u_{n+1}$. 故に，$w \leqq u_{n+1} - u_n$. $\{u_n\}$ は収束するから，R 上で $u_{n+1}(z) - u_n(z) \to 0$ となり，$w = 0$. 故に，$u - v \in \mathcal{I}(R)$ となり，$v = u_Q$. 此から定理は明かである。

一般の $u \in SP(R)$ に対しては，

$$u_Q = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} [(-m) \vee (n \wedge u)].$$

さて，f を R 上の有界特性(bounded characteristic)を持つ有理型函数とする。即ち，R 上の有界正則函数 f_1, f_2 により，$f = f_1/f_2$ と書けるものとする。此時，$\log|f| = \log|f_1| - \log|f_2|$

$\in SP(R)$ であるから, $\log|f|$ ($=u$ と書く)は内部と外部に分解される。u_I, u_Q の共軛調和函数を $(u_I)_*$, $(u_Q)_*$ とし, $f_I = e^{u_I + i(u_I)_*}$ $f_Q = e^{u_Q + i(u_Q)_*}$ と置けば, f_I, f_Q は有界特性を持つ乗法的有理型函数であって, $|f| = |f_I|\cdot|f_Q|$ である。定理1.4 によれば, f_Q は R 上で正則である。此処で乗法的とは次の事を云ふ。R の一次元の特異ホモロジー群を $H_1(R;\mathbb{Z})$ と書き, $H^1(R;\mathbb{Z})$ の乗法的指標 (*multiplicative character*) の作る群を $\mathcal{X}$ と書く。h を R 上の(多価)有理型函数とする時, h が指標 θ ($\in \mathcal{X}$) を持つ乗法的有理型函数であるとは, 任意の $a \in R$ と a に於ける h の任意の函数要素 h_a に対し, a から出発して道 $\alpha \in H^1(R;\mathbb{Z})$ に沿って h_a を解析接續して得られる函数要素を $h_a^{(\alpha)}$ と書く時, $h_a^{(\alpha)} = \theta(\alpha)\cdot h_a$ が成立つ事を云ふ。

定義3. $[0, +\infty]$ に値を取る R 上の函数 u が *locally meromorphic modulus* (l. m. m. と略す) であるとは, R 上の乗法的有理型函数 f で $u = |f|$ を満足するものが存在する事を云ふ。此 f を正則函数に取れる時は, u を *locally analytic modulus* (l. a. m.) と呼ぶ。f が有界特性を持つ時は, u も有界特性を持つと云ふ。

明かに, l.m.m. u が有界特性を持つ條件は $\log u \in SP(R)$ である。

定義4. 有界特性を持つ l.m.m. u に対し, u が内部的 (又は, 外部的) とは, $\log u \in \mathcal{I}(R)$ (又は, $\log u \in \mathcal{Q}(R)$) を云ふ。

定理 1.5. 任意の有界特性を持つ l.m.m. u は，内部的 l.m.m. u_I と外部的 l.m.m. u_Q の積 $u=u_I \cdot u_Q$ に一意的に分解される。此処で，$u_I = \exp(P_I(\log u))$，$u_Q = \exp(P_Q(\log u))$ である。

§2. 空間 H^p と B^p.

定義 5. R を有界な平面領域とする。$0<p<\infty$ に対し，$|f|^p$ が R 上で調和な優函数を持つやうな，R 上の正則（一価）函数 f の全体を $H^p = H^p(R)$ と書く。R 上の有界正則函数の全体を $H^\infty = H^\infty(R)$ と書く。$0<p<\infty$ に対し，u^p が R 上で調和な優函数を持つやうな l.a.m. u の全体を $B^p = B^p(R)$ と書く。又，有界な l.a.m. の全体を $B^\infty = B^\infty(R)$ と書く。

此時，次の性質は見易い。

定理 2.1. (a) $0<p\leqq\infty$ に対し，H^p は複素ベクトル空間である。 (b) $0<p\leqq\infty$ に対し，H^p は H^∞-加群，H^∞ は多元環である。 (c) $f\in H^p$，$g\in H^q$ で，$1\leqq p, q\leqq\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ならば，$fg\in H^1$。 (d) $u\in B^\infty$，$v\in B^p$ ならば，$uv\in B^p$。 (e) $u\in B^p$，$v\in B^q$ で，$1\leqq p, q\leqq\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ならば，$uv\in B^1$. (f) $0<p\leqq q\leqq\infty$ ならば，$H^q\subseteq H^p$，$B^q\subseteq B^p$。

定義 6. $0<p<\infty$ と $a\in R$ を固定する時，$u\in B^p$ に対し，$\|u\|_{p,a} = ((L.H.M.(u^p))(a))^{1/p}$ と置く。L.H.M. は最小調和優函数を示す。又，$f\in H^p$ に対し，$\|f\|_{p,a} = \||f|\|_{p,a}$ と置く。

$u \in B^\infty$ に対し，$\|u\|_\infty = \sup\{u(z) : z \in R\}$，$f \in H^\infty$ に対し，$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in R\}$ と置く。

定理 2.2. $1 \leqq p < \infty$ に対し，H^p は $\|\cdot\|_{p,a}$ をノルムとしてバナッハ空間をなす。H^∞ は $\|\cdot\|_\infty$ に関しバナッハ環をなす。又，H^p は位相 H^∞-加群である。

此処で，R の普遍被覆面の利用に就て述べる。良く知られておるやうに，単位開円板 Δ を R の普遍被覆リーマン面と看做す事が出来る。φ を Δ から R の上への等角な被覆写像とする。又，Δ から Δ の上への分数一次変換で $\varphi \circ \tau = \varphi$ を満足するものの全体を T と書き，$SP_T = \{u \in SP(\Delta) : \tau \in T \Rightarrow u \circ \tau = u\}$ と置く。

定理 2.3. $u \in SP(R)$ に対し，$\hat{\varphi}(u) = u \circ \varphi$ と定義する。此時，$\hat{\varphi}$ は $SP(R)$ から SP_T の上へのベクトル束同型である。更に，

(a) SP_T は $SP(\Delta)$ の完備なベクトル部分束である。

(b) $A = A(T) \subseteqq SP_T$ とする。分解 $SP(\Delta) = A^\perp \oplus A^{\perp\perp}$ に附随する射影を $P_{A^\perp}$，$P_{A^{\perp\perp}}$，分解 $SP_T = A(T)^\perp \oplus A(T)^{\perp\perp}$ に附随する射影を $P_{A(T)^\perp}$，$P_{A(T)^{\perp\perp}}$ と書けば，SP_T 上では $P_{A^\perp} = P_{A(T)^\perp}$，$P_{A^{\perp\perp}} = P_{A(T)^{\perp\perp}}$。

(c) A を $SP(\Delta)$ の完備ベクトル部分束且順序イデアルとし，$A(T) = A \cap SP_T$ と置くならば，SP_T 上では $P_{A^\perp} = P_{A(T)^\perp}$，$P_A = P_{A(T)}$ である。

此は，定理 1.2，1.3 及びベクトル束の基本性質から直ぐ分

る。我々は，定理 2.3 を $A=\{1\}$ に適用する。$u\in SP(R)$ に対し，$u\in \mathcal{I}(R)$（又は，$\mathcal{Q}(R)$）なる為の条件は，$\hat{\varphi}(u)\in\mathcal{I}(\Delta)$（又は，$\mathcal{Q}(\Delta)$）である。一方，$u\in B^p(R)$ に対し，Δ 上の正則函数 f で $\hat{\varphi}(u)=|f|$ なるものが存在する。此時，$|f|^p$ は Δ 上で調和優函数を持つから，$f\in H^p(\Delta)$。又，g が Δ 上の正則函数で，任意の $\tau\in T$ に対し $g\circ\tau=g$ を満足する時は，R 上の（一価）正則函数 h で $\hat{\varphi}(h)=g$ なるものが存在する。

定理 2.4. $u\in B^p(R)$ に対し，$1\leqq p<\infty$ ならば，ρ_u により u^p の R 上の最小調和優函数を表はし，$p=\infty$ ならば，ρ_u により $\|u\|_\infty$ に等しい定数函数を表はすものとすれば，$\rho_u\in\mathcal{Q}(R)$.

証明. $p=\infty$ の場合は自明であるから，$1\leqq p<\infty$ とする。上の注意により，$\hat{\varphi}(u)=|h|$ なる $h\in H^p(\Delta)$ を取る。$|h|^p$ の Δ 上での最小調和優函数を v とすれば，$v\leqq\rho_u\circ\varphi$．一方，

$$|h(z)|^p=\left|\int_0^{2\pi}h(e^{it})P_r(\theta-t)\frac{dt}{2\pi}\right|^p\leqq\int_0^{2\pi}|h(e^{it})|^pP_r(\theta-t)\frac{dt}{2\pi}$$

但し $z=re^{i\theta}\in\Delta$。最右辺は，Δ 上で調和で，$\mathcal{Q}(\Delta)$ に属する。其は v の優函数であり．$\mathcal{Q}(\Delta)$ は順序イデアルであるから，$v\in\mathcal{Q}(\Delta)$。v は T で不変である。実際，$\tau\in T$ とすれば，$|h|^p=|h|^p\circ\tau\leqq v\circ\tau$。$v$ の定義から，$v\leqq v\circ\tau$ となり，結局 $v=v\circ\tau$．故に，R 上の調和函数 v' で $\hat{\varphi}(v')=v$ なるものが存在する。即ち，$u^p\leqq v'\leqq\rho_u$ となり，$\rho_u=v'\in\mathcal{Q}(R)$。

系 2.5. $u \in B^p(R)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, に対して

(a) u は有界特性を持つ，即ち $\log u \in SP(R)$.

(b) $(\log u) \vee 0 \in \mathcal{Q}(R)$.

証明。$1 \leqq p < \infty$ の時を示せば充分。$p \log u \leqq u^p \leqq \rho_u$ で，$\rho_u \in \mathcal{Q}(R)$ である．$\log u = p^{-1}\rho_u - (p^{-1}\rho_u - \log u) \in SP(R)$。実際，$p^{-1}\rho_u - \log u \geqq 0$ で，此は対数的特異的のみを持つ。故に $p^{-1}\rho_u - \log u \in SP(R)$．又，$p^{-1}\rho_u \in \mathcal{Q}(R) \subseteq SP(R)$．故に (a) が成立つ。(b) は，$0 \leqq (\log u) \vee 0 \leqq p^{-1}\rho_u$ と，$\mathcal{Q}(R)$ が順序イデアルなる事から分る。

系 2.6. $u \in B^p(R)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, に対して，$u_I \in B^\infty(R)$ 且つ $\|u_I\|_\infty = 1$.

証明. $s = \log u$ と置くと，上の系から，$(\log u) \vee 0 \in \mathcal{Q}(R)$ であるから，$P_I(s) = P_I(s \wedge 0) \leqq 0$ となり，$u_I = \exp(P_I(s)) \leqq 1$.
今，もし $u_I \leqq r < 1$ なる定数 r があれば，$P_I(s) = \log u_I \leqq \log r < 0$，即ち，$0 < -\log r \leqq -P_I(s) \in \mathcal{I}(R)$ であって，$\mathcal{I}(R)$ は順序イデアルであるから，定数函数 $-\log r$ が $\mathcal{I}(R)$ に属する事になり矛盾である。

定義 7. $1 \leqq p \leqq \infty$ とする。$u, v \in B^p(R)$ に対し，$v/u \in B^p(R)$ の時，$u | v$ in B^p と書く。$u, v \in H^p(R)$ に対し，$|v|/|u| \in B^p(R)$ の時，$u | v$ in H^p と書く。

系 2.7. $u, v \in B^p(R)$ が $u | v$ in B^p であるとすれば，$u_I | v_I$ in

B^∞ 且つ $u_Q \mid v_Q$ in B^p.

証明. $\log(v_I/u_I) = \log v_I - \log u_I = P_I(\log v) - P_I(\log u)$ $= P_I(\log(v/u)) \leqq 0$ (系 2.6). 後半は普遍被覆面へ移して見れば, 直ぐ分る.

系 2.8. $u \in B^p(R)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, に対し, Δ 上の内部函数 g で $\hat{\varphi}(u_I) = |g|$ なるものが存在する.

証明. 先づ, $\hat{\varphi}(u_I) = |g|$ なる Δ 上の正則函数 g を取る. 系 2.3 によれば, $\|g\|_\infty = 1$. Jensen 不等式により

$$-\log|g(z)| \geqq \int_0^{2\pi} (-\log|g^*(e^{it})|)\, P_r(\theta - t) \frac{dt}{2\pi} \geqq 0.$$

然るに, $(-\log|g(z)|) \wedge 1 = 0$ であるから $|g^*(e^{it})| = 1$ a.e.

§3. $H^p(R)$ の H^∞-部分加群.

Voichick [8] 及び筆者により次の結果が知られてゐる.

定理 3.1. R を有限個の解析的 Jordan 曲線で囲まれた平面領域 (又は, 有限リーマン面) とし, $1 \leqq p \leqq \infty$ とする. $\mathfrak{M}$ を $H^p(R)$ の閉部分空間とする時, $\mathfrak{M}$ が $H^\infty(R)$-加群である為の条件は, 内部的 l. a. m. I で $\mathfrak{M} = \{ f \in H^p(R) : |f|/I \in B^p(R) \}$ なるものが存在する事である. 但し, $p = \infty$ の時は, $\mathfrak{M}$ は汎弱閉であるとする.

$p = \infty$ の時は, 汎弱閉の代りに β-閉であると仮定してもよい. 此処で, R 上の函数の空間 $\mathfrak{F}$ の β 位相は次の様に定義さ

れる。R上の複素数値連續函数fで，任意の$\varepsilon>0$に対し$\{z\in R: |f(z)|\geq\varepsilon\}$がコンパクトであるやうなものの全体を$C_0(R)$と表はす。此時，$\mathfrak{F}$の中のnet $\{g_\lambda\}$が$g\in\mathfrak{F}$にβ位相で收束するとは，任意の$f\in C_0(R)$に対し$f(g_\lambda-g)\to 0$（一様）である事を云ふ。R上の有界正則函数の空間$H^\infty(R)$のβ位相は，Rubel-Shield [7]等で詳しく調べられてゐる。

我々の問題は，定理3.1を更に一般な平面領域に拡張する事である。其為に，先づ次を示す。

定理3.2. $I\in B^\infty(R)$を内部的l.a.m.とし，

$$H^p(I;R)=\{f\in H^p(R):\ I\,|\,|f|\ \text{in}\ B^p\}$$

と置く。此時，(a) $H^\infty(I;R)$は$H^\infty(R)$のβ-closedイデアルであり，(b) $1\leq p\leq\infty$に対し，$H^p(I;R)$は$H^p(R)$のノルム閉$H^\infty(R)$-部分加群である。

我々は，$H^p(I;R)$が閉集合なる事のみを示せばよい。先づ，次の結果は，普遍被覆面へ移す方法で簡単に分る。

補題3.3. $u\in B^\infty(R)$が内部的ならば，任意の$1\leq p\leq\infty$と任意の$v\in B^p(R)$に対し，$\|uv\|_p=\|v\|_p$.

定理3.2の証明. (a) $H^\infty(I;R)$の中の函数列$\{f_n\}$が$f\in H^\infty(R)$にβ收束するとする。先づ，$\{\|f_n\|_\infty\}$は有界である。又，假定より，$|f_n|/I\in B^\infty(R)$. 上の補題により，$\||f_n|/I\|_\infty=\|f_n\|_\infty\leq M$（$M$は定数）．各点毎の極限をとる事により，$\||f|/I\|_\infty$

$\leq M$ が得られる。故に，$|f|/I \in B^{\infty}(R)$ となり，$f \in H^{\infty}(I;R)$．此から，$H^{\infty}(I;R)$ が β 閉である事が分る。

(b) $p=\infty$ の場合は，(a) により $H^{\infty}(I;R)$ は β 閉だから，ノルム閉でもある。次に，$1 \leq p < \infty$ とする。$\{f_n\} \subset H^p(I;R)$ が $f \in H^p(R)$ に収束するものとし，$g_n, g, \mathfrak{g}$ を夫々 f_n, f, I の Δ への正則な lifting とする。$|f_n|/I \in B^p(R)$ であるから，$(|f_n|/I)\circ\varphi = |h_n|$ を満足する $h_n \in H^p(\Delta)$ が存在する。此時 $g_n = c_n \mathfrak{g} h_n$（$c_n$ は絶対値 1 の定数）を得る。$\mathfrak{g} H^p(\Delta)$ は閉集合であり，$H^p(\Delta)$ で $g_n \to g$ であるから，$g \in \mathfrak{g} H^p(\Delta)$ となり，$|f|/I \in B^p(R)$ が示された。

<u>定義 8.</u> $H^p(R)$ の閉 $H^{\infty}(R)$-部分加群が $H^p(I;R)$ の形の時，其は <u>quasi-principal</u> であると云ふ。I をその生成元と云ふ。I が R 上の一価正則函数 g により $|g|$ の形に書ける時は，$H^p(I;R) = g\,H^{\infty}(R)$ となるが，此時は，<u>principal</u> であると云ふ。

Neville の論文 [5] の主要定理は次の通りである。

<u>定理 3.4.</u> R を Blaschke 領域，Γ を R の標準境界 (canonical border) とし，$R \cup \Gamma$ は調和的に完備であると假定する。此時，$H^p(R)$ のノルム閉（但し，$p=\infty$ の時は，β 閉）$H^{\infty}(R)$-部分加群は quasi-principal である。

上で定義なしに用ひた術語は，以下の節で説明される。証明は第 8 節で与へられる。

§4. 単純領域

Jordan領域に近い無限連結領域を定義しやう。

<u>定義 9.</u> $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$を平面上の相対コンパクト集合の列で、閉苞が互に素なるものとする時、$p\in\mathbb{C}$が$\{A_n\}$の集積点であるとは、pの任意の近傍が無数のA_nと交はる事を云ふ。

<u>定義 10.</u> 平面領域Rが<u>単純</u>であるとは、次の何れか一つの條件を満足する事を云ふ。

(a) $R=A_0\sim\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$, 此処で、$A_0$は有界単連結領域、$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$は空でないコンパクト連結集合の列で、$A_i\subseteqq A_0$ $(i\geqq 1)$, $A_i\cap A_j=\phi$ $(1\leqq i, j$ 且つ $i\neq j)$なるものとする。更に、Eを$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$の集積点の集合とする時、$E\subseteqq(\mathbb{C}\sim A_0)\cup\bigcup_{i=1}^{n}A_i$なる$n$が存在する。

(b) $R=A_0\sim\bigcup_{i=1}^{m}A_i$ で、A_0と$\{A_i\}_{i=1}^{m}$は(a)の條件を満す。

<u>定義 11.</u> $R=A_0\sim\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$を定義10,(a)の意味での単純領域とする。此時、整数列$0<s(1)<s(2)<\cdots<s(n)$と点列$a_i\in A_i$, $1\leqq i<\infty$で、領域$R_0=A_0\sim\bigcup_{i=1}^{n}A_{s(i)}$がグリーン函数$G$を持ち、任意の$z\in R$に対して$\sum\{G(a_i, z): 1\leqq i<\infty,\ i\neq s(j),\ 1\leqq j\leqq n\}<\infty$を満足するならば、$R$を<u>Blaschke領域</u>と云ふ。

さて、与へられた単純領域の特別な被覆列(exhaustion)を構成しよう。$R=A_0\sim\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$を無限多重連結な単純領域とし、$E\subseteqq\bigcup_{i=1}^{n}A_i$とする。周知のやうに、$R$の部分Jordan領域の列

$\{R_m\}_{m=1}^{\infty}$ で $\bar{R}_m \subseteqq R_{m+1}$ 且つ $R = \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m$ なるものが存在する。$\mathbb{C}$ の領域が Jordan 領域であるとは，其が有限個の解析的な Jordan 曲線で囲まれてゐる事を云ふ。斯様な領域は $U_0 \sim \bigcup_{i=1}^{k} \bar{U}_i$ の型に書ける。但し，U_i，$0 \leqq i \leqq k$，は解析的Jordan 曲線で囲まれた単連結領域で，$\bar{U}_i \subseteqq U_0$ $(1 \leqq i \leqq k)$，$\bar{U}_i \cap \bar{U}_j = \phi$ $(1 \leqq i, j \leqq k$ 且つ $i \neq j)$ なるものとする。上の形の表示をJordan 領域の標準表示と呼ぶ。

補題 4.1. R を無限多重連結な単純領域とし，A を $\mathbb{C} \sim R$ の有界な成分で，$A \cap E = \phi$ なるものとする。此時，A を含む任意の開集合 U に対し次の性質を持つ整数 N が存在する。$m \geqq N$ ならば，$\mathbb{C} \sim \bar{R}_m$ の有界成分 D_m で $A \subseteqq D_m \subseteqq \bar{D}_m \subseteqq U$ なるものが存在し，$\mathbb{C} \sim R$ の他の成分 A' に対しては $A' \cap \bar{D}_m = \phi$ を満す。

証明．先づ，$A \subseteqq V$，$(\mathbb{C} \sim R) \sim A \subseteqq W$ 且つ $\bar{V} \cap \bar{W} = \phi$ なる開集合 V，W を取る。我々は，$U \subseteqq V$ 且つ U は連結と假定してよい。∂U はコンパクトで，$\partial U \subseteqq \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m$ であるから，$m \geqq N$ ならば $R_m \supseteqq \partial U$ なる N が存在する。$m \geqq N$ とすれば，$\bar{R}_m \subseteqq R$ より，$A \subseteqq \mathbb{C} \sim R \subseteqq \mathbb{C} \sim \bar{R}_m$ となり，A を含む $\mathbb{C} \sim \bar{R}_m$ の成分が唯一つ存在する。其を D_m と書けば，$\partial U \subseteqq R_m$ であるから，$\partial U \cap D_m = \phi$ となり，$A \subseteqq D_m \subseteqq \bar{D}_m \subseteqq U$．$A' \cap \bar{D}_m = \phi$ は作り方から明かである。

補題 4.2. Jordan 領域 S_m による R の被覆列で次の條件を

満すものが存在する。$\bar{S}_m \subsetneqq S_{m+1}$ $(m=1,2,\cdots)$; $S_j = D_{0,j} \sim \bigcup_{i=1}^{k(j)} \overline{D_{i,j}}$ を S_j の標準表示とする時, $k(j) \geqq n$, $A_i \subsetneqq D_{i,j}$ $(1 \leqq i \leqq n)$; $n+1 \leqq i \leqq k(j)$ に対し, $D_{i,j}$ は $\mathbb{C} \sim R$ の一つ且つ唯一つの成分を含む; $\overline{D_{0,j}} \subsetneqq A_0$; $\overline{D_{0,j}} \subsetneqq D_{0,j+1}$; $\overline{D_{i,j+1}} \subsetneqq D_{i,j}$ $(1 \leqq i \leqq n)$; A が $\mathbb{C} \sim R$ の成分で, $A \subsetneqq D_{i,j}$ 且つ $A \subsetneqq D_{k,j+1}$ (但し, $i,\ k \geqq n+1$) ならば, $\overline{D_{k,j+1}} \subsetneqq D_{i,j}$.

証明. K を R の任意のコンパクト部分集合とし, $\{U_i\}_{i=0}^{n}$ を連結開集合の列で, $A_i \subsetneqq U_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $\mathbb{C} \sim A_0 \subsetneqq U_0$, $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j = \phi$ $(0 \leqq i, j \leqq n,\ i \neq j)$, $\bar{U}_i \cap K = \phi$ $(0 \leqq i \leqq n)$ を満すものとする。前補題を繰返し適用する事により, 次の性質を持つ Jordan 領域 $D_0 \sim \bigcup_{i=1}^{n} \bar{D}_i$ が作れる。(i) $A_i \subsetneqq D_i \subsetneqq \bar{D}_i \subsetneqq U_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$; (ii) $\bar{D}_0 \subset A_0$, $\mathbb{C} \sim D_0 \subsetneqq U_0$; (iii) $\partial D_i \subsetneqq R$ $(0 \leqq i \leqq n)$. 明かに, $D_0 \sim \bigcup_{i=1}^{n} \bar{D}_i$ は K を含み, $\bar{D}_0 \sim \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ は $A_0 \sim \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ のコンパクト部分集合である. 従て, $E \cap (\bar{D}_0 \sim \bigcup_{i=1}^{n} D_i) = \phi$ となり, $\bar{D}_0 \sim \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ は高々有限個の A_j $(j \geqq n+1)$ と交はる。必要ならば番号を附替へて, $A_j \cap (\bar{D}_0 \sim \bigcup_{i=1}^{n} D_i) \neq \phi$ $(n+1 \leqq j \leqq m)$, $= \phi$ $(j \geqq m+1)$ と出来る。此は $A_j \subsetneqq \bar{D}_0 \sim \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ $(n+1 \leqq j \leqq m)$ を意味する. $\{U_j\}_{j=n+1}^{m}$ を連結開集合の列で, $U_j \cap K = \phi$, $A_j \subsetneqq U_j \subsetneqq \bar{U}_j \subsetneqq D_0 \sim \bigcup_{i=1}^{n} \bar{D}_i$ $(n+1 \leqq j \leqq m)$, $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j = \phi$ $(n+1 \leqq i, j \leqq m,\ i \neq j)$ なるものとして, 補題4.1 を用ひて $A_j \subsetneqq D_j \subsetneqq \bar{D}_j \subsetneqq U_j$ なる $\{D_j\}_{j=n+1}^{m}$ を作る。此時, Jordan 領域 $D_0 \sim \bigcup_{i=1}^{m} \bar{D}_i$ は K を含

み次の性質を持つ。 $m \geqq n$; $D_0 \subseteq A_0$; $A_i \subseteq D_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$; $n+1 \leqq i \leqq m$ に対し D_i は $\mathbb{C} \sim R$ は唯一つの成分を含む。帰納法により補題を得る。

定義 12. 補題 4.2 で述べられた性質を持つ R の被覆列を，R の超単純被覆列 (*supersimple exhaustion*) と呼ぶ。

定理 4.3. $R = A_0 \sim \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ を無限多重連結な単純領域とし，$\{A_i\}$ の集積点の集合 E は $\bigcup_{i=0}^{n} \partial A_i$ に含まれるものとする。此時，

(a) 次の性質を持つ Jordan 曲線の列 $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在する：J_i の内部を D_i と書く時，$A_i \subseteq D_i$ $(1 \leqq i < \infty)$; $A_i \cap \overline{D}_j = \phi$ $(1 \leqq i, j \leqq n,\ i \neq j)$; $A_j \cap \overline{D}_i = \phi$ $(n+1 \leqq i < \infty,\ 1 \leqq j < \infty,\ i \neq j)$.

(b) $i \geqq 1$ に対し，α_i により (a) の J_i を D_i の各点のまはりの廻転数が $+1$ であるやうに向きを附けて出来るサイクルとすると，$\{\alpha_i : i = 1, 2, \cdots\}$ は $H_1(R; \mathbb{Z})$ の生成系である。

証明. $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ を Jordan 領域による R の超単純被覆列とし，$R_j = D_{0,j} \sim \bigcup_{i=1}^{m(j)} \overline{D_{i,j}}$, $A_i \subseteq D_{i,j}$ $(1 \leqq i \leqq m(j))$ であるとする。必要ならば部分列を取ることにより，$m(j) \geqq j$ を仮定してもよい。此時，$D_i = D_{i,1}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $= D_{i,i}$ $(i \geqq n+1)$ と置けば，$J_i = \partial D_i$ は (a) の條件を満足する。

次に J_i と α_i は (b) で与へられたものとする。又，$\{R_j\}$ は R の超単純被覆列で，$R_j = D_{0,j} \sim \bigcup_{i=1}^{m(j)} \overline{D_{i,j}}$, $A_i \subseteq D_{i,j}$ $(1 \leqq i \leqq m(j))$ の形を持つとする。Jordan 曲線 $\partial D_{i,j}$ を $D_{i,j}$ の各点の周りの

週転数が $+1$ である様に向きを附けた1サイクルを $\alpha_{i,j}$ と書く。

さて，α を R 上の特異1サイクルであって，内部 D を持つ Jordan 曲線 J を D の各点の周りの週転数が $+1$ である様に向きを附けて得られたものを考へる。此時，或 j に対し，$J \cup \bigcup_{i=1}^{n} J_i \subseteq R_j$ 且つ $\bar{D} \subseteq D_{0,j}$，更に，$1 \leqq i \leqq m(j)$ に対して $\bar{D}_{i,j} \subseteq D$，$\bar{D}_{i,j} \cap \bar{D} = \phi$ の一方が成立つ。

もし $\bar{D} \subseteq R_j$ ならば，$\alpha \sim 0$ が R_j で，従てまた R で成立つ。$\bar{D} \not\subseteq R_j$ の時は，$\bar{D}_{i,j} \subseteq D$ なる i が存在する。此性質を持つ $D_{i,j}$ を $D_{s(1),j}, \cdots, D_{s(l),j}$ とすると，$D \sim \bigcup_{i=1}^{l} \bar{D}_{s(i),j}$ は $R_j\ (\subseteq R)$ の部分 Jordan 領域である。故に $\alpha \sim \sum_{i=1}^{l} \alpha_{s(i),j}$.

さて，各 $\alpha_{i,j}$ は α_i の整係数一次結合に homologous である事を示す。k を充分大きく取れば，$\bar{D}_{i,k} \subseteq D_{i,j}\ (1 \leqq i \leqq m(j))$ 且つ $\bar{D}_{i,k} \subseteq D_i\ (n+1 \leqq i \leqq m(j))$ が成立つ。$D_i \sim \bar{D}_{i,k} \subseteq R_k \subseteq R$ であるから，$\alpha_i \sim \alpha_{i,k} \sim \alpha_{i,j}\ (n+1 \leqq i \leqq m(j))$．次に，$\alpha_{i,j}\ (1 \leqq i \leqq n)$ を考へる。假に $i=1$ としよう．$J_1 \subseteq R_j$ であるから，$\bar{D}_{1,j} \subseteq D_1$．$\partial D_1 = J_1 \subseteq R_j$ であり，$\bar{D}_1 \cap A_i = \phi\ (1 \leqq i \leqq n)$ であるから，$\bar{D}_1 \cap \bar{D}_{i,j} = \phi\ (1 \leqq i \leqq n)$。$D_{i,j} < D_1$ なる全ての i を $t(1) < \cdots < t(p)$ とする。此時，$t(i) \geqq n+1$ であり．$D_1 \sim (\bar{D}_{1,j} \cup \bigcup_{i=1}^{p} \bar{D}_{t(i),j}) \subseteq R_j \subseteq R$ となるから，$\alpha_1 \sim \alpha_{1,j} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{t(i),j} \sim \alpha_{1,j} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{t(i)}$.

此等の考察から定理は明かである。

さて，R を Blaschke 領域とし，$\mathbb{C}\sim R$ の成分の中で連續体でないものの合併を S と書く。此時，$R\cup S$ はまた Blaschke 領域であり，$0<p\leqq\infty$ に対し $H^p(R\cup S)$ から $H^p(R)$ への制限は等距離同型である事が容易に示される。此事実の故に，以下では，Blaschke 領域 R については，$\mathbb{C}\sim R$ の成分が全て連續体であると假定する。

定理 4.4. R を無限多重連結 Blaschke 領域とし，$R=A_0\sim\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ を其標準表示とする。E を $\{A_i\}$ の集積点の集合とし，$E\subseteqq\bigcup_{i=0}^{n}\partial A_i$ 且つ $E\cap\partial A_i\neq\phi$ $(1\leqq i\leqq n)$ と假定する。又，G を $R_0=A_0\sim\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ のグリーン函数とする。此時，次の性質を持つ正ボレル測度の列 $\{\mu_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ が存在する。μ_i の台は A_i に含まれ；$\mu_i(A_i)=1$；任意の $z\in R$ に対し $\sum_{i=n+1}^{\infty}\int G(a,z)\,d\mu_i(a)<\infty$；$i\geqq n+1$ に対し $\int G(a,z)\,d\mu_i(a)$ は R 上で有界な調和函数である。

証明. Blaschke 領域の定義から，全ての $z\in R$ に対して，$\sum_{i=n+1}^{\infty}G(a_i,z)<\infty$ なる如き点列 $a_i\in A_i$，$1\leqq i<\infty$ が存在する。今，$z'\in R$ を固定する。$n+1\leqq i$ に対し，$G(a,z')$ は $a\in A_i$ 上で連續であるから，$a\in A_i$ 且つ $|a-a_i|<\varepsilon_i$ ならば $|G(a,z')-G(a_i,z')|<2^{-i}$ を満す $\varepsilon_i>0$ が存在する。A_i はみな連續体であるから，$i\geqq n+1$ に対し A_i に含まれる連續体 B_i で $a_i\in B_i\subseteqq A_i\cap\Delta(a_i,\varepsilon_i)$ ($\Delta(a,\varepsilon)$ は中心 a，半径 ε の開円板) なるものが存在する。此処で，$i\geqq n+1$ を固定する。境界條件 $h(p)$

$=0$ ($p\in\partial R_0$)，$=1$ ($p\in\partial B_i$)を満足する$R_0 \sim B_i$に対するディリクレ問題の解をhとし，更に$h(p)=1$ ($p\in B_i$)と置くと，hはR_0上の連続な優調和函数である。Rieszの定理によれば，B_i上に台を持つ正ボレル測度μで，$h(z)=\int G(a,z)d\mu(a)$ ($z\in R_0$)を満すものが存在する。$\mu_i=\mu/\mu(B_i)$と置けば，$\mu_i(A_i)=1$且つ$\int G(a,z)d\mu_i(a)\leq \mu(B_i)^{-1}$ ($z\in R$)．$\int G(a,z)d\mu_i(a)$はR上で調和であり，B_iの作り方から$\int G(a,z')d\mu_i(a) \leq \int (G(a_i,z')+2^{-i})d\mu_i(a)\leq G(a_i,z')+2^{-i}$．故に，$\sum_{i=n+1}^{\infty} \int G(a,z')d\mu_i(a) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} G(a_i,z')+\frac{1}{2} <+\infty$．此処で，Harnackの定理を用いれば，定理を得る。

定理4.5. Rを無限連結Blaschke領域，$H_1(R;\mathbb{Z})$の乗法的指標のなす群を$\mathcal{X}$とする。此時，R上の外部的l.a.m.の族$\{\delta_\theta : \theta\in\mathcal{X}\}$で次の性質を持つものが存在する。(a) $\delta_1=1$; (b) δ_θは指標θを持つ，即ちδ_θは指標θを持つ乗法的正則函数の絶対値である; (c) $0<\delta_\theta\leq 1$; (d) 函数列$\{\delta_\theta\delta_{\theta_m}\}_{m=1}^{\infty}$ (但し，$\theta, \theta_m\in\mathcal{X}$)が$|f|$，$f\in H^\infty(R)$，の形の函数に各点收束すれば，$f$は$\beta$-生成元である。此処で，$f\in H^\infty(R)$が<u>$\beta$-生成元</u>（$\beta$-exterior）であるとは，$f\cdot H^\infty(R)$が$H^\infty(R)$で$\beta$-稠密なる事を云ふ。

証明. 必要ならば，等角写像で変換する事により，A_i ($1\leq i\leq n$)は内点を持つと假定出来る。我々は，$1\leq i\leq n$に対しては，$a_i\in A_i^{\circ}$なるものとする。更に，J_i，α_iは定理4.3で与へられたもの，μ_iは定理4.4で与へられたものとする。

さて，$\theta \in \mathcal{X}$ とし，$\lambda_j \in [0,1)$ を $\theta(\alpha_j) = e^{2\pi i \lambda_j}$ のやうに取る。此時，定理 4.4 により $\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \int G(a,z)\,d\mu_j(a)$ は R 上で調和である。$u(z) = \exp(-\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \int G(a,z)\,d\mu_j(a))$ と置けば，u は R 上の外部的 l.a.m. であり，$0 < u \leqq 1$ である。u の指標を φ_u と書けば，$\varphi_u(\alpha_j) = e^{2\pi i \lambda_j} = \theta(\alpha_j)$，$n+1 \leqq j < \infty$. 此は直接の計算で分る。次に，$1 \leqq j \leqq n$ に対し $m_j = \sup\{|z-a_j| : z \in R\}$ と置き，更に $0 \leqq \beta_j < 1$ を $\exp(2\pi i \beta_j) = \exp(2\pi i \lambda_j)(\varphi_u(\alpha_j))^{-1}$ のやうに取る。$v(z) = \prod_{j=1}^{n} |(z-a_j)/m_j|^{\beta_j}$ と置けば，R 上で $0 < v \leqq 1$ で，且つ $\varphi_v(\alpha_j) = \exp(2\pi i \beta_j)$ $(1 \leqq j \leqq n)$，$= 1$ $(n+1 \leqq j < \infty)$ を満す。従て，$\delta_\theta = uv$ と置けば，(a), (b), (c) が満足される。終に (d) を示す。δ_θ の構成法から

$$(\delta_\theta \delta_{\theta_m})(z) = \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{z-a_j}{m_j}\right|^{\beta_{m,j}} \prod_{j=n+1}^{\infty} \exp\left(-\lambda_{m,j} \int G(a,z)\,d\mu_j(a)\right),$$

但し $0 \leqq \beta_{m,j} < 2$，$0 \leqq \lambda_{m,j} < 2$. 必要ならば部分列へ移る事により，$\lim_{m\to\infty} \beta_{m,j} = \beta_j$，$\lim_{m\to\infty} \lambda_{m,j} = \lambda_j$ が存在するとしてよい。此時，$0 \leqq \beta_j \leqq 2$，$0 \leqq \lambda_j \leqq 2$ であって，

$$|f(z)| = \lim_{m\to\infty} (\delta_\theta \delta_{\theta_m})(z) = \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{z-a_j}{m_j}\right|^{\beta_j} \prod_{j=n+1}^{\infty} \exp\left(-\lambda_j \int G(a,z)\,d\mu_j(a)\right).$$

さて，$f \in H^\infty(R)$ であるから，$\varphi_{|f|} = 1$ である。従て，β_j，λ_j は整数でなければならない。

$k \geqq n+1$ に対し，$u_k = \exp\left(\lambda_k \int G(a,z)\,d\mu_k(a)\right)$ と置き，又，$v_k = \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{z-a_j}{m_j}\right|^{c_{j,k}}$ と置く。但し，$c_{j,k}$ は $\exp(2\pi i c_{j,k})\varphi_{u_k}(\alpha_j) = 1$，$-1 \leqq c_{j,k} \leqq 1$，$0 \leqq \beta_j + \sum_{l=n}^{k} c_{j,l} \leqq 2$ $(1 \leqq j \leqq n)$ で決める。

此時，$\varphi_{u_k v_k}(\alpha_j)=1$ $(1\leqq j<\infty)$ となり，$\varphi_{u_k v_k}=1$，$k\geqq n+1$。故に，$u_k v_k=|f_k|$ なる $f_k\in H^\infty(R)$ が存在する。今，$d_{j,k}=\beta_j+\sum_{\ell=n+1}^{k} c_{j,k}$ と置けば $0\leqq d_{j,k}\leqq 2$ で，従て

$$|f\prod_{\ell=n+1}^{k}f_\ell|=\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{z-a_j}{m_j}\right|^{d_{j,k}}\exp\Big(-\sum_{j=k+1}^{\infty}\lambda_j\int G(a,z)\,d\mu_j(a)\Big)$$
$$\leqq\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{z-a_j}{m_j}\right|^{d_{j,k}}\leqq\text{一定数}\qquad(k\geqq n+1).$$

正規族の論法を用いれば，或部分列 $\{f\prod_{\ell=n+1}^{k(p)}f_\ell\}_{p=1}^{\infty}$ が R 上で β 収束する。其極限を g とする。必要ならば更に部分列を取って，$\lim_{p\to\infty}d_{j,k(p)}=d_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ が存在するとしてよい。明かに $0\leqq d_j\leqq 2$. 此時，$|g(z)|=\lim_{p\to\infty}|f(z)\prod_{\ell=n+1}^{k(p)}f_\ell(z)|=\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{z-a_j}{m_j}\right|^{d_j}$。$g\in H^\infty(R)$ であるから，$\varphi_{|g|}=1$，即ち d_j は整数である。故に $g(z)=c\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z-a_j}{m_j}\right)^{d_j}$ （c は定数で，$|c|=1$）となるから，g は $H^\infty(R)$ で可逆となり，勿論 β 生成元である。従て，f も β 生成元である。

§5. 標準境界と調和測度.

R を無限多重連結な単純領域とし，$R=A_0\sim\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ を定義10の意味での標準表示，E_0 を $\{A_i\}$ の集積点の集合，E_1 を一点から成る A_i の合併，$E=E_0\cup E_1$ とする。E を R の異常集合 (exceptional set) と呼ぶ。$B_0=\hat{\mathbb{C}}\sim A_0$，$B_i=A_i$ $(i\geqq 1)$ と置けば，$R=\hat{\mathbb{C}}\sim\bigcup_{i=0}^{\infty}B_i$.

さて，$a_0\in R$ を固定する。$B_i\not\subset E$ なる i に対し，φ_i を $\hat{\mathbb{C}}\sim B_i$

から Δ へのリーマンの写像函数で，$\varphi_i(a_0)=0$，$\varphi_i'(a_0)>0$ なるものとする。此時，$\varphi_i(R)=\Delta\sim\bigcup\{\varphi_i(B_j) : 0\leqq j<\infty, j\neq i\}$ も単純領域である。F_i を $\{\varphi_i(B_j) : 0\leqq j<\infty, j\neq i\}$ の集積点の集合とする。我々は，$\Gamma_i=\partial\Delta\times\{A_i\}\sim F_i\times\{A_i\}$，$\Gamma=\bigcup\{\Gamma_i : B_i\nsubseteq E\}$ と置く。写像の族 $\{\varphi_i : B_i\nsubseteq E\}$ を用ひて，我々は $R\cup\Gamma$ に解析的構造を導入し，$R\cup\Gamma$ を縁附きリーマン面(*borderd Riemann surface*)とする事が出来る。Γ を R の標準境界(*canonical border*)と呼ぶ。

此処で，縁附きリーマン面 $R\cup\Gamma$ に就て簡単に考察しよう。$R\cup\Gamma$ の Jordan 部分領域とは，$R\cup\Gamma$ の連結開部分集合 R_0 で $R\cup\Gamma$ での閉苞 $\overline{R}_0$ がコンパクトな縁附きリーマン面になるものを云ふ。

定理 5.1. $R\cup\Gamma$ の Jordan 部分領域 R_n から成る $R\cup\Gamma$ の被覆列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\overline{R}_n\subseteqq R_{n+1}$ なるものが存在する。

証明．縁附きリーマン面 $R\cup\Gamma$ の double を $\check{R}$ とし，s を $\check{R}$ から $\check{R}$ への等角な鏡映写像で，$s^2=$ 恒等写像，且つ Γ 上では恒等写像であるものとする。

$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\check{R}$ の Jordan 領域による被覆列で，$\overline{U}_n\subseteqq U_{n+1}$ 且つ $U_n\cap\Gamma\neq\phi$ なるものとする。$V_n=U_n\cup s(U_n)$ と置くと，V_n は領域であって，

$$\partial V_n=\overline{V}_n\sim V_n=(s(\partial U_n)\sim\overline{U}_n)\cup(\partial U_n\sim s(\overline{U}_n))\cup(\partial U_n\cap s(\partial U_n)).$$

上式の最右辺の第一、二項は∂V_nの開部分集合で，解析的な閉曲線及び開弧より成る。実際，$s(\partial V_n)$は解析的弧から成る。(I, φ)を$s(\partial V_n)$の部分弧で，$\varphi(I)=(-1, 1)$であるとすると，$s^{-1}(I)$は解析的弧であるから，$(-1, 1)$の近傍から$\check{R}$への正則函数φ_1で$s^{-1}(I)=\varphi_1((-1, 1))$なるものがある。$\tilde{\varphi}_1(z)=\varphi_1(\bar{z})$と置けば$s\circ\tilde{\varphi}_1$は正則で，$I=s\circ\varphi_1((-1, 1))=s\circ\tilde{\varphi}_1((-1, 1))$となるから，$I$は解析的弧である。

斯様にして，$\partial V_n\cap s(\partial V_n)$は解析的曲線の共通分となるので，連續体及び高々有限個の孤立点よりなる。此孤立点の中のいくつかは，上に述べた開弧の端点であり，残りの点pは次の性質を持つ：pを中心とする座標円板(V, φ)で$\overline{V}\cap(\partial V_n\sim\{p\})=\phi$なるものが存在する。$V$は連結であるから，$V\sim\{p\}\subseteq V_n$である。$V_n'=V_n\cup\{p\in\partial V_n:\ p\notin\overline{\partial V_n\sim\{p\}}\}$と置くと，$V_n'$は連結開集合で，$\partial V_n'$は有限個の連續体から成り，$V_n\subseteq V_n'\subseteq\overline{V_n}\subseteq V_{n+1}$である。其処で，$\partial V_n'$上で$h=1$，$\partial V_{n+1}'$上で$h=0$を境界條件として，$V_{n+1}'\sim\overline{V_n'}$に対するヂリクレ問題を解き，解を$h$と書く。次に，$0<c<1$を$\{h(z)=c\}$上では$\delta h=dh+idh_*\neq 0$であるやうに選び，$W_n=\{z\in V_{n+1}'\sim\overline{V_n'}:\ h(z)>c\}\cup\overline{V_n'}$と置くと，$W_n$は解析的曲線で囲まれた$\check{R}$の対称Jordan部分領域であり，$\overline{V_n'}\subseteq W_n\subseteq\overline{W_n}\subseteq V_{n+1}'$，$n=1, 2, \cdots$，を満足する。終に，$R_n=W_n\cap(R\cup\Gamma)$，$n=1,2,\cdots$，と置けば定理が成立つ。

<u>定理 5.2.</u> $R \cup \Gamma$ 及び $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ は定理 5.1 の通りとし，$g_n(a,z)$ を $a \in R_n$ に極を持つグリーン函数，$G(a,z)$ を $a \in R$ に極を持つグリーン函数とすれば，$G(a,z) = \lim_{n\to\infty} g_n(a,z) = \sup_n g_n(a,z)$.

証明. $a, z \in R_m$ に対して，$g_m(a,z) \leqq g_{m+1}(a,z) \leqq \cdots \leqq G(a,z)$. 従て，$R_m \sim \{a\}$ の任意のコンパクト集合上で $g_\ell(a,z)$ は一様に収束する。h を其極限とすれば，$g_\ell(a,z) \leqq h(z) \leqq G(a,z)$，$z \neq a$. 即ち，$h$ は $R \sim \{a\}$ 上で >0 且つ調和であり、a で位数 1 の対数的特異点を持つ。グリーン函数の最小性から，$h = G$。

<u>定理 5.3.</u> $R \cup \Gamma$ を縁附きリーマン面，$G(a,z)$ を a に極を持つ R のグリーン函数，$G(a,z)_*$ を $G(a,z)$ の共役調和函数とすると，$G(a,z)_*$ は R から $R \cup \Gamma$ へ連續的に延長され，$-dG(a,z)_*$ は Γ 上で正の測度を表はす。更に，$-\int_\Gamma dG(a,z)_* \leqq 2\pi$。

証明. (V, φ) を $R \cup \Gamma$ 上の座標半円板で，φ は V を $\Delta \cap \{z : \Im z \geqq 0\}$ へ連續的に，$V \cap R$ を $\Delta \cap \{z : \Im z > 0\}$ へ解析的に写すものとし，更に $z \in (-1, 1)$ に対し $G(a, \varphi^{-1}(z)) = 0$ であるとする。Δ 上の函数 u を，$u(z) = G(a, \varphi^{-1}(z))$ $(\Im z \geqq 0)$，$= -G(a, \bar\varphi^{-1}(\bar z))$ $(\Im z < 0)$ で定義すれば，u は Δ 上で調和である。u_* を u の共役調和函数とすれば，$G(a,z)_*$ の V 上の函数要素 $g(a,z)_*$ で，$u_*(z) = g(a, \varphi^{-1}(z))_*$ $(\Im z \geqq 0)$ なるものが存在する。従て，$g(a, \varphi^{-1}(z))_*$ は $(-1, 1)$ を越えて調和函数として延長される。Δ 上では，$dG(a, \varphi^{-1}(z))_* = \frac{\partial u_*}{\partial x}dx + \frac{\partial u_*}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ であ

るから，特に $z \in (-1, 1)$ では，$dG(a, \varphi^{-1}(z))_* = -\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} dx$．此処で，$u(z) > 0$ $(\Im z > 0)$，$= 0$ $(\Im z = 0)$ であるから，$\frac{\partial u}{\partial y} > 0$ が $z \in (-1, 1)$ で成立つ。即ち，Γ 上では，$dG(a, z)_* < 0$．

R_n と g_n を定理 5.2 の通りとする。n が充分大きければ，$\overline{V} \subseteq R_n$ であり，又 $g_n(a, z) \uparrow G(a, z)$．$g_n(a, \varphi^{-1}(z))$ の Δ への調和函数としての延長を u_n と書く。此時，$\{u_n\}$ は其導函数を含めて u に Δ 上広義一様に収束する．特に，$dg_n(a, z)_* = -\frac{\partial}{\partial y} g_n(a, \varphi^{-1}(x+iy))\Big|_{y=0} dx$ は $V \cap \Gamma$ 上で広義一様に $dG(a, z)_*$ に収束する。従て，定理の後半は $-\int_{\partial R_n} dg_n(a, z)_* = 2\pi$ から直ちに分る。

補題 5.4. a に極を持つ $\Delta \cap \{z : \Im z > 0\}$ のグリーン函数を $G(a, z)$ とする。$a_0 \in (-1, 1)$ と $\delta > 0$ を $[a_0 - \delta, a_0 + \delta] \subset (-1, 1)$ のやうに取ると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し次の性質を持つ $\eta > 0$ が存在する。

$$1 - \varepsilon < \int_{a_0-\delta}^{a_0+\delta} \frac{\partial}{\partial y} G(a, z)\Big|_{y=0} \frac{dx}{2\pi} \leqq 1 \qquad (a \in \Delta \cap \{\Im z > 0\}, |a - a_0| < \eta)$$

証明．我々は，函数

$$\varphi_0(z) = [(z+1)^2 - i(z-1)^2] / [(z+1)^2 + i(z-1)^2]$$

は $\Delta \cap \{\Im z > 0\}$ を Δ 上に等角且つ一対一に写し，而も $[-1, 1]$ を下半円周に写す事に注意する。此から，$G(a, z) = G_0(\varphi_0(a), \varphi_0(z))$ なる事が分る。但し，$G_0(b, w) = -\log|(w-b)/(1-\bar{b}w)|$ は Δ のグリーン函数である。さて，$\varphi_0(a) = \rho e^{i\theta}$，$\varphi_0(x) = e^{it}$ と置くと，

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi_0(x+iy)\Big|_{y=0} = \frac{8(x^2-1)}{\{(x+1)^2+i(x-1)\}^2} = \frac{8(x^2-1)}{(x+1)^4+(x-1)^4}\cdot\varphi_0(x)$$

であるから，$z=x$ では

$$d\varphi_0 = \frac{8(x^2-1)}{(x+1)^4+(x-1)^4}\varphi_0(x)\,dx.$$

此から，

$$\frac{\partial}{\partial y}G(a, x+yi)\Big|_{y=0} = P_\rho(\theta-t)\frac{8(1-x^2)}{(x+1)^4+(x-1)^4}.$$

一方，$\frac{d\varphi_0(x)}{dx}\cdot dx = e^{it}\cdot i\cdot dt = \varphi_0(t)\cdot i\cdot dt$ で，$\frac{d\varphi_0(x)}{dx} = \frac{8i(1-x^2)}{((x+1)^2+i(x-1)^2)^2}$

であるから，

$$\frac{\partial}{\partial y}G(a, x+yi)\Big|_{y=0}dx = P_\rho(\theta-t)\,dt.$$

此から，定理の性質は明かである。

<u>定理 5.5.</u> $R\cup\Gamma$ を縁附きリーマン面とし，a に極を持つ R のグリーン函数を $G(a, z)$ とする。f を Γ 上の有界連續函数とし，$h_f(a) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(z)\,dG(a,z)_*$ と置けば，h_f は R 上の調和函数で $h_f\cup f$ は $R\cup\Gamma$ で連續である。

証明. 定理 5.3 により，$\int_\Gamma f(z)\,dG(a,z)_*$ は意味を持ち，R 上で有界である。此が R 上で調和である事を示す為に，f は非負で，其台はコンパクトで且つ座標半円板 (V, φ) に含まれるものとする。

定理 5.2 の証明の中の記号を用ひる。先づ，$V\cap\Gamma$ 上では，$-dg_n(a,z)_* \nearrow -dG(a,z)_*$. 今，$u(a) = -\frac{1}{2\pi}\int_{V\cap\Gamma} f(z)\,dG(a,z)_*$，$u_n(a) = -\frac{1}{2\pi}\int_{V\cap\Gamma} f(z)\,dg_n(a,z)_*$ と置くと，u_n は R_n 上で正且

つ調和で，R上で$u_n(a)\uparrow u(a)$が成立つ。$k\geqq n$とし，(W,ψ)をR_kに含まれる座標円板とする。u_kはR_k上で調和だから，

$$u_k(\psi^{-1}(z))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_k(\psi^{-1}(e^{it}))P_r(\theta-t)\,dt,\quad z=re^{i\theta}\in\Delta$$

が成立つ。積分の収束定理により

$$u(\psi^{-1}(z))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\psi^{-1}(e^{it}))P_r(\theta-t)\,dt$$

を得るから，uはW上で調和であり，従てR上で調和である。

$g(a,z)$をaに極を持つ$\Delta\cap\{\operatorname{Im} z>0\}$のグリーン函数とする。此時，$a,z\in\Delta\cap\{\operatorname{Im} z>0\}$に対し，$g(a,z)\leqq G(\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(z))$。此を定理5.3，補題5.4と併せて，$h_f\cup f$が$R\cup\Gamma$上で連續である事が分る。

一般のfに対しては，1の分割の論法を用ひればよい。

さて，$R\cup\Gamma$はコンパクトでない縁附きリーマン面とし，$R\cup\Gamma\cup\{\infty\}$を$R\cup\Gamma$の Alexandroff コンパクト化とする。此時$\partial R=\Gamma\cup\{\infty\}$．$f$を$\partial R$上の実数値有界函数とし，

$$\underline{H}_f=\sup\{s:\ s\text{ は優調和，上に有界，且つ任意の } b\in\partial R \text{ に対し，} \limsup\{s(a): a\in R,\ a\to b\}\leqq f(b)\ \}$$

と置き，$\overline{H}_f$も類似に（上下を取替へて）定義する．此時は，$\underline{H}_f\leqq\overline{H}_f$．もし，$\underline{H}_f=\overline{H}_f$ならば，$f$は可解(resolutive)であると呼ぶ。可解の時は，共通の函数をH_fと書く。此はR上で調和である。∂R上の全ての連續函数は可解である．$a\in R$を固定する時，$f\longmapsto H_f(a)$は$C(\partial R)$上の連續汎函数である，従

て，∂R 上の正ボレル測度 ω_a $\left(\int_{\partial R} d\omega_a = 1\right)$ で $H_f(a)=\int_{\partial R} f(z)\,d\omega_a(z)$ なるものが存在する。此 ω_a を a に対する調和測度と云ふ。

定理 5.6. $R\cup\Gamma$ を縁附きリーマン面で，$G(a,z)$ を a に極を持つ R のグリーン函数とすれば，Γ 上に於て $d\omega_a(z)=-\frac{1}{2\pi}dG(a,z)_*$.

証明. (V,φ) を座標半円板とし，f を $V\cap\Gamma$ にコンパクトな台を持つ正連続函数とする。定理 5.5 の証明と同様に，n を大きく取り，$k\geqq n$ ならば $\overline{V}\subseteqq R_k$ とする。$\partial R_k\sim V$ 上では $f=0$ として，f を ∂R_k 上に連續的に延長する。此時，$H_f^{R_k}(a)=-\frac{1}{2\pi}\int_{V\cap\Gamma} f(z)\,dg_k(a,z)_*$ は R_k で調和で，$V\cap\Gamma$ 上では境界値 f を取る。$V\cap\Gamma$ 上では，$-dG(a,z)_*\geqq -dg_k(a,z)_*$ であるから，$\liminf_{a\to b} -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(z)\,dG(a,z)_*\geqq f(b)$，$b\in V\cap\Gamma$，が成立つ。もし，$b\in\partial R\sim V$ ならば $f(b)=0$ であるから，其処でも同じ不等式が成立する。故に，$H_f(a)=\overline{H}_f(a)\leqq -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(z)\,dG(a,z)_*$．一方，$R$ 上の函数 u_k を，$u_k(a)=H_f^{R_k}(a)$ $(a\in R_k)$，$=0$ $(a\in R\sim R_k)$ で定義すれば，u_k は劣調和で $u_k\cup f$ は $R\cup\Gamma$ 上で連續である。從て，$H_f(a)=\underline{H}_f(a)\geqq u_k(a)=-\frac{1}{2\pi}\int_{V\cap\Gamma} f(z)\,dg_k(a,z)_*$ $(a\in R_k)$．$V\cap\Gamma$ 上では一様に $-dg_k(a,z)_*\uparrow -dG(a,z)_*$ であるから，R 上で $H_f(a)\geqq -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(z)\,dG(a,z)_*$ が成立つ事が分る。故に，$H_f(a)=-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(z)\,dG(a,z)_*$ となり，定理が成立する事が分る。

$z\in\Gamma$ では $G(a,z)=0$ であるから，$\delta G(a,z)=dG(a,z)+i\,dG(a,z)_*$ と書く時，Γ に沿っては $d\omega_a(z)=-\frac{1}{2\pi}dG(a,z)_*=-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a,z)$ が成

立つ。又，調和函数の最小値の原理から次の結果を得る。

定理 5.7. 調和函数 ω_a に関する可測性，可積分性は $a\in R$ の選び方に無関係である。

§6. 調和函数の積分表示.

前節の記号を用ひ，R 上の調和函数の積分表示について考察する。以下 $a_0\in R$ を固定する。

定理 6.1. $f^*\in L^1\left(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0,z)\right)$ に対して

$$h(a)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a,z), \qquad a\in R$$

と置けば，

(a) h は R 上の外部的調和函数である.

(b) h は Γ 上殆んど至る処非接線的境界値 h^* を持ち，$h^*=f^*$ a.e. である。

証明 (i) 先づ f^* が有界であると假定する。$\|f^*\|_\infty\leqq K$ であるとすれば，$\{f_n^*\}\subset C_0(\Gamma)$ で $\|f_n^*\|_\infty\leqq K$，且つ $f_n^*\to f$ a.e. なるものが存在する。其処で，

$$h_n(a)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_n^*(z)\,\delta G(a,z)$$

と置くと，定理 5.5 により，h_n は R 上で調和で，$h_n\cup f_n^*$ は $R\cup\Gamma$ で連續である。さて，定理 5.3 から $|h_n(a)|\leqq K$ が分るから，$\{h_n\}$ は R 上で同程度連續であり，従て適当な部分列 $\{h_{n'}\}$ が R 上で或調和函数 h' に広義一様に収束する。Lebesgue

の収束定理により，

$$h'(a)=\lim_{n'\to\infty} h_{n'}(a)=\lim_{n'\to\infty} -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*_{n'}(z)\,\delta G(a,z)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lim_{n'\to\infty} f^*_{n'}(z)\cdot\delta G(a,z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a,z) = h(a).$$

即ち，h は R 上調和である。

(ii) 次に，$f^*\in L^1(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0,z))$ とする。$f^*=f^*\vee 0+f^*\wedge 0$ と分解して考へれば，$f^*\geqq 0$ と假定してよい事が分る。其処で，$f^*_n=f^*\wedge n$，$n=1,2,\cdots$，$h_n(a)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*_n(z)\delta G(a,z)$ と置けば，(i)で示した事により，h_n は R 上で調和であり且つ $h_1(a)\leqq h_2(a)\leqq\cdots\leqq h(a)$ が成立つ。Harnack の定理により，$\{h_n\}$ は R 上で或調和函数 h'' に広義一様に収束する。積分の収束定理により，$h''=h$ が分るから，h は R 上で調和である事が示された。更に，$h_n\leqq h$，$h_n\leqq n$ であるから，$h_n\leqq h\wedge n\leqq h$ となり，$\lim_{n\to\infty} h\wedge n=h$。定理 1.4 の証明より，$h$ が外部的である事が分る。

(iii) h の境界値を調べる為に，$R\cup\Gamma$ 上の座標半円板 (V,φ) を任意に取る。φ_0 を補題 5.4 の証明中に与へられた函数とすれば，$\varphi_0\circ\varphi$ は $V\cap R$ を Δ 上に一対一且つ等角に写し且つ $V\cap\Gamma$ を下半円周 $\gamma_-=\{z:|z|=1,\ \mathrm{Im}\,z<0\}$ に写す。R 上の函数 F に対し，Δ 上の函数 $T(F)$ を $F\circ(\varphi_0\circ\varphi)^{-1}$ と定義する。

先づ，h は R 上で外部的だから，h の $V\cap R$ への制限も同

様，従って $T(h)$ は Δ 上で外部的且つ調和である。故に，$T(h)$ は $\partial\Delta$ 上で殆んど至る処非接線境界値 $T(h)^*$ を持ち，$T(h)$ は $T(h)^*$ の Poisson 積分で表はされる。次に，$\{k_n\}\subset C_0(\Gamma)$ を $k_n\to f^*$ （$L^1(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0,z))$ 且つ a.e.）のやうに取る。$h_n(a) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma k_n(z)\,\delta G(a,z)$ と置けば，定理 5.5 により h_n は R 上で調和，$h_n\cup k_n$ は $R\cup\Gamma$ 上で連續である。従って，$T(h_n)$ は Δ 上で調和，$\bar{\Delta}$ 上で連續であり，γ_- 上では境界値 $k_n\circ(\varphi_0\circ\varphi)^{-1}$ を持つ。

さて，定義から

$$|h_n(a)-h(a)| \leqq -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma |k_n(z)-f^*(z)|\,\delta G(a,z) \quad (\equiv u_n(a))$$

であり，(ii)で示した事から u_n は R 上で調和である。又，$k_n\to f^*$ （L^1）であるから，$u_n(a_0)\to 0$. Harnack 不等式により，任意の $a\in R$ に対して $u_n(a)\to 0$. $u_n((\varphi_0\circ\varphi)^{-1}(w))$ は $|T(h_n)(w)-T(h)(w)|$ の調和優函数であり，$|T(h_n)(w)-T(h)(w)|$ の最小調和優函数は $\int_0^{2\pi}|(T(h_n))^*(e^{it})-(T(h))^*(e^{it})|\,P_r(\theta-t)\frac{dt}{2\pi}$ （但し，$w=re^{i\theta}$）であるから，特に $a_1=(\varphi_0\circ\varphi)^{-1}(0)$ に対して

$$\int_0^{2\pi}|T(h_n)^*(e^{it})-T(h)^*(e^{it})|\frac{dt}{2\pi}\leqq u_n(a_1)$$

が成立つ。即ち，$T(h_n)^*\to T(h)^*$ （$L^1(dt)$）. 適当な部分列を取れば，γ_- 上では $k_{n'}\circ(\varphi_0\circ\varphi)^{-1}\to T(h)^*$ a.e. 定理 5.3 の証明の最後の部分に於ける境界上の調和測度の形に注意すれば，$V\cap\Gamma$ 上で殆んど至る処 h^* が存在して $k_{n'}\to h^*$ a.e.

である事が分る。h_n の定義と，V の任意な事から，Γ 上で $h^* = f^*$ a.e. である事が証明された。

<u>補題 6.2.</u> $R\cup\Gamma$ を縁付きリーマン面，f を R 上の調和函数で下に有界（$\geqq M$）であるとする。此時，f は Γ 上殆んど至る処非接線方向の境界値 f^* を持つ．更に，$f^* \geqq 0$ a.e. とすれば，任意の $p\in\Gamma$ に対して，$\liminf_{\substack{a\to p\\ a\in R}} f(a) \geqq 0$．

証明．(V, φ) を $R\cup\Gamma$ の任意の座標半円板とし，$u = f\circ(\varphi_0\circ\varphi)^{-1}$ と置く。假定から u は Δ 上で調和で且つ $u \geqq M$ を満足する．今，境界條件 $v(z) = 0$ $(z\in\partial\Delta\cap\{\mathrm{Im}\, z<0\})$，$= M$ $(z\in\partial\Delta\cap\{\mathrm{Im}\, z>0\})$ の下での Δ に対する Dirichlet 問題の解を v と書く。此時，$a = re^{i\theta}\in\Delta$ に対して

$$(u-v)_Q(a) = \frac{1}{2\pi}\int (u-v)^*(e^{it})\, P_r(\theta - t)\, dt \geqq 0 .$$

又，$u-v$ は下に有界であるから，$(u-v)_I \geqq 0$ である．従て，$u - v = (u-v)_Q + (u-v)_I \geqq 0$，即ち，$u \geqq v$．$v$ は下半円周上で連續であるから，$p\in V\cap\Gamma$ に対し $\liminf_{\substack{a\to p\\ a\in R}} f(a) \geqq 0$．

<u>補題 6.3.</u> 補題 6.2 と同じ假定の下で次が成立つ：

$$f(a) \geqq -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a,z) + M\left(1 + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \delta G(a,z)\right),\quad a\in R.$$

証明．先づ，$f\geqq 0$ を假定する．R_n, g_n を定理 5.2 の通りとし，$m = 1, 2, \cdots$ に対し $f^*_m = f^*\wedge m$ と置く．此時，

$$u_{m,n}(a) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_n\cap\Gamma} f^*_m(z)\,\delta g_n(a,z) \qquad (a\in R_n)$$

と置けば，定理 6.1 により $u_{m,n}$ は R_n 上で調和且つ有界であ

り，∂R_n での境界値は $(u_{m,n})^*(z) = 0$ a.e. $(z \in \partial R_n \sim \Gamma)$, $= f_m^*(z)$ a.e. $(z \in \partial R_n \cap \Gamma)$ である。従て，$f - u_{m,n}$ は R_n 上で調和で下に有界且つ ∂R_n 上で $(f - u_{m,n})^* \geq 0$ a.e. である．補題 6.2 により，全ての $p \in \partial R_n$ に対して，$\liminf_{\substack{a \to p \\ a \in R_n}} (f - u_{m,n})(a) \geq 0$. $R_n \cup \partial R_n$ はコンパクトであるから，調和函数の最小値の原理を適用して，$f(a) \geq u_{m,n}(a)$ $(a \in R_n)$ が成立つ。今、n と $a \in R_n$ を固定し，$l > n$ とすれば

$$f(a) \geq u_{m,l}(a) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_l \cap \Gamma} f_m^*(z)\, \delta g_l(a,z)$$

$$\geq -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_n \cap \Gamma} f_m^*(z)\, \delta g_l(a,z).$$

此処で，$\partial R_n \cap \Gamma$ 上では一様に $-\frac{1}{2\pi i}\delta g_l(a,z) \uparrow -\frac{1}{2\pi i}\delta G(a,z)$ なる事に注意すれば，$f(a) \geq -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_n \cap \Gamma} f_m^*(z)\,\delta G(a,z)$. 次に，$m, n \to \infty$ として見れば，積分の収束定理から

$$\text{(1)} \qquad f(a) \geq -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a,z)$$

を得る．一般の f に就ては，$f - M$ に (1) を適用すればよい。

<u>系 6.4.</u> $R \cup \Gamma$ を縁付きリーマン面，f を R 上の調和函数とする。もし f が上に有界 $(\leq M')$ ならば，

$$f(a) \leq -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a,z) + M'\left(1 + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \delta G(a,z)\right), \quad a \in R.$$

特に f が有界 $(|f| \leq M)$ ならば，$a \in R$ に対し

$$\left| f(a) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a,z) \right| \leq M\left(1 + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \delta G(a,z)\right).$$

さて、我々は Γ が充分に大きい場合を考へよう。即ち．

定義 13. 縁附きリーマン面 $R\cup\Gamma$ の理想境界 $\{\infty\}$ の調和測度が 0, 即ち Γ の調和測度が 1, の時, $R\cup\Gamma$ を調和的に完備である (harmonically complete) と云ふ。

系 6.5. $R\cup\Gamma$ が調和的に完備であるとする. R 上の調和函数 f が下に有界ならば,

$$f(a) \geqq -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a,z)\,, \qquad a\in R.$$

また, f が有界ならば,

$$f(a) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a,z)\,, \qquad a\in R.$$

定理 6.6. $R\cup\Gamma$ を調和的に完備であるとする.

(a) $f\in HP'(R)$ ならば, Γ 上殆んど至る処 f^* が存在して調和測度に就て可積分であり,

$$f_Q(a) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a,z)\,, \qquad a\in R.$$

(b) $f\in HP'(R)$ に対し, Γ 上で $f^*=(f_Q)^*$ a.e., $(f_I)^*=0$ a.e.

(c) $1\leqq p<\infty$ に対し, R 上の複素数値調和函数 f で $|f|^p$ が R 上で調和優函数を持つものの全体を $h^p(R)$ と書き, 又, R 上の有界複素数値調和函数の全体を $h^\infty(R)$ と書く。$h^p(R)$ のノルムを, $\|f\|_{p,a_0}=((\text{L.H.M.}(|f|^p))(a_0))^{1/p}$ ($f\in h^p(R)$, $1\leqq p<\infty$ の時), $\|f\|_\infty=\sup_{z\in R}|f(z)|$ ($f\in h^\infty(R)$ の時) で定義する. 此時, 対応 $S: f\longmapsto f^*$ は $h^p(R)$ から $L^p(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0,z))$ への線型写像で, 次の性質を持つ。

(i) $1\leqq p\leqq\infty$ の時, S は等距離的全射である.

(ii) $p=1$ ならば，S は縮小作用素 (contraction) であり，$h_Q^1(R)$ 上では等距離的全射である．又，$H^1(R)$ 上でも等距離的である．

証明 (a) $f \geqq 0$ として証明すれば充分である。此時，f^* の存在及び可積分性は系 6.5 に含まれてゐる．系 6.5 の不等式と定理 6.1 から，

$$f(a) \geqq f_Q(a) \geqq -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\delta G(a,z), \qquad a \in R$$

である事が分る。$n=1,2,\cdots$ に対し，$f \wedge n$ は有界だから，此に就ては系 6.5 後半の等式が成立つ．$(f\wedge n)^* \leqq f^*$ である事と，$f_Q = \lim_{n\to\infty} f\wedge n$ (定理 1.4 の証明) とから

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\delta G(a,z) \geqq \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (f\wedge n)^*(z)\delta G(a,z)$$
$$= \lim_{n\to\infty}(f\wedge n)(a) = f_Q(a)$$

となり，求める等式を得る。

(b) (a) の等式に定理 6.1 を適用すれば，$(f_Q)^* = f^*$ a.e. 従て，$(f_I)^* = (f - f_Q)^* = f^* - (f_Q)^* = 0$ a.e.

(c) Γ 上の可積分函数 k に対し，$h_k(a) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma k(z)\delta G(a,z)$ と置く．さて，(Δ, ψ) を R の普遍被覆リーマン面とする。$f \in h^p(R)$ $(1<p\leqq\infty)$ (又は，$f \in H^1(R)$) とすれば，$f\circ\psi \in h^p(\Delta)$ $(1<p\leqq\infty)$ (又は，$f\circ\psi \in H^1(\Delta)$) であるから，$f\circ\psi$ は Δ 上で (調和函数として) 外部的である。定理 2.3 の後の注意から，f は R 上で外部的となり，(a) により $f = h_{f^*}$ を得る．

$1<p<\infty$，$f \in h^p(R)$ とする。$u = L.H.M.(|f|^p)$ と置けば，

$|f|^p \leqq u$ であるから, $|f^*|^p \leqq u^*$ a.e. $u \in HP'(R)$ であるから, $u^* \in L^1(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0, z))$ となり, 従て $f^* \in L^p(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0, z))$ である. 即ち, S は $h^p(R)$ を $L^p(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0, z))$ に写す. 又, $f \in h_Q^1(R)$ だから, Hölder 不等式により $L.H.M.(|f|) = h_{|f^*|} \leqq (h_{|f^*|^p})^{1/p}$. 即ち, $|f|^p \leqq h_{|f^*|^p}$ となり, $u \leqq h_{|f^*|^p}$ を得る. 定理 6.1 により $h_{|f^*|^p} \in \mathcal{Q}(R)$ であり, $\mathcal{Q}(R)$ は順序イデアルであるから, $u \in \mathcal{Q}(R)$ である. 従て, $|f^*|^p \leqq u^*$ より $h_{|f^*|^p} \leqq h_{u^*} = u$. 故に, $h_{|f^*|^p} = u$ となり

$$\|f\|_{p, a_0}^p = u(a_0) = h_{|f^*|^p}(a_0) = \|f^*\|^p_{L^p(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0, z))}.$$

即ち, S は等距離的である. S が全射である事は見易い.

次に, $f \in h^1(R)$ とする. 先ず (a) から, $f_Q = h_{f^*}$. 今, $u = L.H.M.(|f_Q|)$ とすれば, $u = h_{|f_Q^*|} = h_{|f^*|}$ を得るから, S は $h_Q^1(R)$ から $L^1(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0, z))$ への等距離的全射である事が示された. 又, $v = L.H.M.(|f|)$ と置き, $v = v_I + v_Q$ と分解して見れば, $|f^*| \leqq v^* = (v_Q)^*$ となり, $\|f^*\|_{L^1(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0, z))} = v_Q(a_0) \leqq v(a_0) = \|f\|_{1, a_0}$. 即ち, S は $h^1(R)$ では縮小的である. 最後に, $H^1(R)$ に関する結果は, $H^1(R) \subset h_Q^1(R)$ から分る。

<u>定理 6.7.</u> $1 < p < \infty$ に対し, バナッハ空間 $h^p(R)$ の共軛空間は $L^q(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0, z))$, 但し $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, で共軛関係は

$$\langle f, g^* \rangle = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f^*(z) g^*(z)\, \delta G(a_0, z)$$

で与へられる. 此処で, $f \in h^p(R)$, $g^* \in L^q(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0, z))$ である.

又, $h^1_Q(R)$ の共軛空間は $L^\infty(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0, z))$ であり, $(h^\infty(R), \beta)$ ($h^\infty(R)$ に β 位相を与へたもの) の共軛空間は $L^1(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0,z))$ である。

証明. $h^\infty(R)$ に関するものは β 位相の理論から出る. 残りは前定理から明かである.

§7. Blaschke 領域に対するコーシーの定理と其逆.

先づ縁附きリーマン面に対するコーシーの定理から始める.

<u>定理 7.1.</u> $R\cup\Gamma$ を調和的に完備な縁附きリーマン面で, 其グリーン函数 $G(a, z)$ は任意の $a\in R$ に対して $\lim_{z\to\infty} G(a,z)=0$ を満足すると假定する。今, $a_0\in R$ を固定し, 更に $z_1, \cdots, z_n$ を R 上の $\delta G(a_0, z)$ の相異なる零点で重複度を $c_1, \cdots, c_n$ なるものとする。$g(z)=\exp(-\sum_{p=1}^n c_p G(z_p, z))$ と置く。もし f が R 上の有理型函数で $|f|g\in B^1(R)$ ならば, Γ 上殆んど至る処 f^* が存在し, f^* は可積分で

$$f(a_0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a_0, z).$$

証明. $z_i, i=1,\cdots,n$ を中心とする座標円板 (V_i, φ_i) を, $i\neq j$ ならば $\bar{V}_i\cap\bar{V}_j=\phi$ なるやうに取る。$0<\varepsilon<1$ として, $R_\varepsilon = R\sim\bigcup_{j=1}^n \varphi_j^{-1}(\overline{\Delta(0,\varepsilon)})$ と置く。G に就ての假定から, $-\log g(z) =\sum_{j=1}^n c_j G(z_j, z)$ は $R_\varepsilon\cup\Gamma\cup\{\infty\}$ 上で連續で, $z\in\Gamma\cup\{\infty\}$ ならば $-\log g(z)=0$, 且つ $z\in R_\varepsilon$ ならば $0<-\log g(z)<K_\varepsilon$

なる定数 K_ε が存在する。従て, g は $B^\infty(R_\varepsilon)$ で可逆である。又, $|f|g\in B^1(R)$ であるから, $|f|\cdot g|_{R_\varepsilon}\in B^1(R_\varepsilon)$ となり g の上の性質から, $f|_{R_\varepsilon}\in H^1(R_\varepsilon)$ が得られる. h を $|f|g$ の R 上での調和優函数とすれば, $|f^*|=g^*\cdot|f^*|\leqq h^*$ a.e. となるから, $f^*\in L^1(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0,z))$ である事が分った。

明かに, $f(z)\delta G(a_0,z)$ は R 上の有理型微分形式で, 唯一の極 a_0 を持ち, 其留数は $-f(a_0)$ である。吾々は, 各 $\overline{V}_j$ が a_0 を含まないとしてよい. $V=\bigcup_{j=1}^n V_j$ と置く。又, $\{R_n\}$, $\{g_n\}$ を定理5.1, 5.2に与へられたものとする. 此処で, 各 R_n は a_0 と全ての $\overline{V_j}$ を含むと假定出来る. f の極の位数に関する假定から, $f(z)\delta G(a_0,z)$ は $\overline{V}$ 上の正則な微分形式である。故に, 普通のコーシーの定理により $\int_{\partial V} f(z)\delta G(a_0,z)=0$.

さて, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, Γ_ε を Γ のコンパクト部分弧で $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\delta G(a_0,z)>1-\varepsilon$ なるものとし, 又, 整数 N を, $n\geqq N$ ならば $\Gamma_\varepsilon\subseteqq R_n$ 且つ $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}(\delta G(a_0,z)-\delta g_n(a_0,z))<\varepsilon$ なるやうに選ぶ。此時, $m\geqq N$ ならば

$$|f(a_0)-(-\tfrac{1}{2\pi i})\int_{\Gamma} f^*(z)\delta G(a_0,z)|$$

$$=\Big|-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_m} f(z)\delta g_m(a_0,z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(z)\delta g_m(a_0,z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f^*(z)\delta G(a_0,z)$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(z)\delta G(a_0,z)\Big|$$

$$\leqq\Big|-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_m\sim\Gamma_\varepsilon} f(z)\delta g_m(a_0,z)\Big|+\Big|-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} f^*(z)(\delta G(a_0,z)-\delta g_m(a_0,z))\Big|$$

$$+\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(z)\left(\delta G(a_0,z)-\delta g_m(a_0,z)\right)\right|+\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\sim\Gamma_\varepsilon} f^*(z)\,\delta G(a_0,z)\right|.$$

上では，有限リーマン面 $R_m\sim V$ に関するコーシーの積分公式と $\int_{\partial V} f(z)\delta G(a_0,z)=0$ とを用ひた。上の最終辺の各項を評価する。$R\cup\Gamma\sim\{a_0\}$ の任意のコンパクト集合上では一様に $\delta g_m(a_0,z)\to\delta G(a_0,z)$ $(m\to\infty)$ であるから，$m\to\infty$ の時第三項 $\to 0$ である。f^*は可積分であるから，$\varepsilon\to 0$ の時第四項 $\to 0$。定理 2.4 によれば，$h=L.H.M.(|f|g)$ は外部的である。明かに h の R_m への制限も外部的で，定理 6.6 (a)が適用される。証明の最初の処で述べたやうに，$R\sim V$ 上では $g(z)\geqq\lambda>0$ なる定数 λ が存在する。此等の事から

$$\text{第一項} \leqq \lambda^{-1}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{\partial R_m\sim\Gamma_\varepsilon}|f(z)|\,g(z)\,\delta g_m(a_0,z)$$

$$\leqq \lambda^{-1}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{\partial R_m\sim\Gamma_\varepsilon} h(z)\,\delta g_m(a_0,z)$$

$$=\lambda^{-1}\left[h(a_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} h(z)\,\delta g_m(a_0,z)\right]\quad (=I_1\ \text{と置く})$$

が得られる。$\varepsilon'>0$ を任意に取る。$h\in\mathfrak{L}(R)$ であるから，定理 6.6. (a)を用ひて，

$$h(a_0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} h^*(z)\,\delta G(a_0,z)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{\Gamma}(h^*\wedge n)(z)\,\delta G(a_0,z)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon'/n}}(h^*\wedge n)(z)\,\delta G(a_0,z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\sim\Gamma_{\varepsilon'/n}}(h^*\wedge n)(z)\,\delta G(a_0,z)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big\{ -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon'/n}} (h^{*}\wedge n)(z)\,\delta g_m(a_0,z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon'/n}} (h^{*}\wedge n)(z)\big(\delta G(a_0,z)-\delta g_m(a_0,z)\big)$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\sim\Gamma_{\varepsilon'/n}} (h^{*}\wedge n)(z)\,\delta G(a_0,z)\Big\}$$

$\left(=\lim_{n\to\infty}\{I_2+I_3+I_4\}\right.$ と置く $\left.\right)$を得る。此処で，$\Gamma_{\varepsilon'/n}$ の定義から $I_4 \leqq \varepsilon'$。又，$\Gamma_{\varepsilon'/n}$ 上では一様に $\delta g_m(a_0,z) \uparrow \delta G(a_0,z)$ であるから，充分大きな全ての m に対し $I_3 \leqq \varepsilon'$。又，n を充分大きく取れば，

$$h(a_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon'/n}} (h^{*}\wedge n)(z)\,\delta G(a_0,z) \leqq \varepsilon'.$$

次に m を大きく取れば，

$$h(a_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon'/n}} h^{*}(z)\,\delta g_m(a_0,z)$$
$$\leqq h(a_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon'/n}} (h^{*}\wedge n)(z)\,\delta g_m(a_0,z) \leqq 3\varepsilon'$$

を得る。故に，ε を小さく，m を大きく取る事によって，I_1 を如何程でも小さく出来る事が分る。終に第二項を評価する。

$$\text{第二項} \leqq \lambda^{-1}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\int_{\Gamma_\varepsilon} h^{*}(z)\big(\delta G(a_0,z) - \delta g_m(a_0,z)\big)$$
$$= \lambda^{-1}\left[\left(h(a_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} h^{*}(z)\,\delta g_m(a_0,z)\right) - \left(h(a_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} h^{*}(z)\,\delta G(a_0,z)\right)\right]$$

であるから，上の考察から此は如何程でも小さく出来る。故に，定理が証明された。

以下では Blaschke 領域のみを考察する。$R = A_0 \sim \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ を無限多重連結な Blaschke 領域の定義 11 の意味の表示とする。

我々は次を假定する．(i) $\{A_i\}$の集積点の集合 E は $\bigcup_{i=0}^{n} \partial A_i$ に含まれ，各 $i=1,\cdots,n$ に対して $E\cap\partial A_i \neq \phi$ である．(ii) 全ての A_i, $i=1,2,\cdots$, は連續体である。(iii) 領域 $A_0 \sim \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ はグリーン函数 $G_0(a,z)$ を持つ．(iv) 全ての $z\in R$ に対して，$\sum_{i=n+1}^{\infty} G_0(a_i,z) < \infty$ が成立つやうな $a_i\in A_i$, $i=1,2,\cdots$, が存在する。

<u>定理 7.2.</u> G を R のグリーン函数，$a_0\in R$ とする．$\mathfrak{Z}$ を $\delta G(a_0,z)$ の零点の全体（但し重複度を数へない）とし，$z\in\mathfrak{Z}$ の重複度を $c(z)$ と書くならば，任意の $w\in R$

$$\sum_{z\in\mathfrak{Z}} c(z)\, G(z,w) < \infty .$$

証明．$\mathfrak{Z}$ は可算個だから，番号を附けて $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ とし，$c_j = c(z_j)$ と置く。∂R は連續体の合併であるから，∂R の各点は Dirichlet 問題の正則点で，従て任意の $p\in\partial R$ に対して $\lim_{w\to p} G(a_0,w) = 0$．此事から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\{z\in R : G(a_0,z) > \varepsilon\}$ は連結，$\{z\in R : G(a_0,z) \geqq \varepsilon\}$ はコンパクトで，$\{z\in R : G(a_0,z) = \varepsilon\}$ が両者の境界である事が分る。$\mathfrak{Z}$ は可算集合だから，$\{z\in R : G(a_0,z) = \varepsilon\} \cap \mathfrak{Z} \neq \phi$ なる ε は高々可算個で，其集積点は 0 である。故に，其を $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ と書く事が出来る。$\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$ である．（$\mathfrak{Z}$ が有限個の時は，定理は明かである。）正数列 $\{\delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ を次の條件で選ぶ。

$$\delta_{2j-1} > \varepsilon_j > \delta_{2j} > \delta_{2j+1} > \varepsilon_{j+1}\ ,\quad j=1,2,\cdots$$

且つ，
$$\sum_k \{c_k(\delta_{2j-1}-\delta_{2j}) : G(a_0,z_k)=\varepsilon_j\} < 2^{-j},\ j=1,2,\cdots .$$

更に，$R_j=\{z\in R:\ G(a_0,z)>\delta_j\}$, $j=1,2,\cdots$ と置く。$\delta G(a_0,w)$ は ∂R_j 上では 0 にならないから，各 R_j は解析曲線で囲まれた Jordan 領域である。此時，N を充分大きく取って次の性質を持たせる事が出来る。$j\geqq 2N-1$ ならば，Jordan 領域 R_j は標準表示（15 頁参照）$D_{j,0}\sim\bigcup_{k=1}^{m(j)}\overline{D}_{j,k}$ を持ち，此処で，$m(j)\geqq n$，$A_k\subsetneqq D_{j,k}$ $(1\leqq k\leqq n)$，更に $\overline{D}_{j+1,k}\subsetneqq D_{j,k}$ $(1\leqq k\leqq n)$ 且つ $\overline{D}_{j,0}\subsetneqq D_{j+1,0}$。

さて，$R_0=A_0\sim\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ と置く。此時，$R_{j,0}=D_{j,0}\sim\bigcup_{k=1}^{n}D_{j,k}$, $j\geqq 2N-1$，は R_0 の Jordan領域による超単純被覆列（定義12）である。明かに，

$$(2)\qquad R_{j+1,0}\sim\overline{R}_{j,0}=(D_{j+1,0}\sim\overline{D}_{j,0})\cup\bigcup_{k=1}^{n}(D_{j,k}\sim\overline{D}_{j+1,k}),$$

$$(3)\qquad \overline{R}_{j+1,0}\sim R_{j,0}=(\overline{D}_{j+1,0}\sim D_{j,0})\cup\bigcup_{k=1}^{n}(\overline{D}_{j,k}\sim D_{j+1,k}).$$

我々は先づ

$$(4)\qquad \overline{D}_{2j,k}\sim D_{2j+1,k}\subsetneqq\overline{R}_{2j+1}\sim R_{2j}\qquad 1\leqq k\leqq n$$

を証明する。假に此式が成立たないとすれば，$D_{2j+1,i}\subsetneqq\overline{D}_{2j,k}\sim D_{2j+1,k}$ なる $i\geqq n+1$ が存在する事になる。其処で，斯様な $D_{2j+1,i}$ の全体を，$D_{2j+1,\sigma(l)}$, $l=1,2,\cdots,q$ $(q\geqq 1)$，とすれば，$\overline{D}_{2j,k}\sim(D_{2j+1,k}\cup\bigcup_{l=1}^{q}D_{2j+1,\sigma(l)})$ $(=S$ と置く）は R のコンパクト Jordan部分領域であって，

$$G(a_0,z)=\begin{cases}\delta_{2j}, & z\in\partial D_{2j,k}\\ \delta_{2j+1}, & z\in\partial D_{2j+1,k}\cup\bigcup_{l=1}^{q}\partial D_{2j+1,\sigma(l)}\end{cases}$$

Pfluger [6 ; p. 35] にある Hopf の定理を用ひれば，$\delta G(a_0, z)$ は S で g 個の零点を持つ事になるが，定義から S 上には零点がないから矛盾である．故に (4) が成立つ。同様にして，

$$\bar{D}_{2j+1,0} \sim D_{2j,0} \subseteqq \bar{R}_{2j+1} \sim R_{2j}.$$

(3) 式を参照すれば，$\bar{R}_{2j+1,0} \sim R_{2j,0} \subseteqq \bar{R}_{2j+1} \sim R_{2j}$ が示された。故に，

$$\sum_k \{c_k G(a_0, z_k) : z_k \in \bar{R}_{2j+1,0} \sim R_{2j,0}\} = 0 .$$

次に，$\bar{R}_{2j,0} \sim R_{2j-1,0}$ を考へる．k $(1 \leqq k \leqq n)$ を固定し，$D_{2j-1,k} \sim \bar{D}_{2j,k}$ に含まれる $\bar{D}_{2j,\ell}$ の形の集合を $\bar{D}_{2j,\ell(s)}$, $\ell(1) < \ell(2) < \cdots < \ell(\alpha)$, とする．其処で $S' = D_{2j-1,k} \sim (\bar{D}_{2j,k} \cup \bigcup_{s=1}^{\alpha} \bar{D}_{2j,\ell(s)})$ と置くと，$\delta G(a_0, z)$ の $\bar{S}'$ 内の零点の個数は，上の Hopf の定理により，重複度を含めて α に等しい。即ち，$\sum\{c_k : z_k \in \bar{S}'\} = \alpha$.
今，各 s $(1 \leqq s \leqq \alpha)$ に対して，$\{u(t)\}_{t=1}^{\beta(s)}$ を $A_u \subseteqq D_{2j,\ell(s)}$ なる u の全体とする。此時，次の性質を持つ整数 $\gamma \geqq 2j+1$ が存在する：$A_{u(t)}$ を含む $\hat{\mathbb{C}} \sim R_\gamma$ の成分を D_t^γ と書けば，

$$1 \leqq t \leqq \beta(s),\ 1 \leqq r < \infty,\ u(t) \neq r \Rightarrow \bar{D}_t^\gamma \cap A_r = \phi .$$

もし $\nu > \gamma$ で，D_t^ν が $\hat{\mathbb{C}} \sim R_\nu$ の成分で $A_{u(t)}$ を含むものとすれば，$\bar{D}_t^\nu \subseteqq D_t^\gamma$ 且つ $\bar{D}_t^\gamma \sim D_t^\nu \subseteqq R$ $(1 \leqq t \leqq \beta(s))$ が成立つ．閉領域 $\bar{D}_t^\gamma \sim D_t^\nu$ の Euler 標数は 0 だから，$\sum\{c_p : z_p \in \bar{D}_t^\gamma \sim D_t^\nu\} = 0$ が $\nu \geqq \gamma+1$ に対して成立つ。$\bar{D}_t^\gamma \cap R = \bigcup_{\nu=\gamma+1}^{\infty} (\bar{D}_t^\gamma \sim D_t^\nu)$ であるから，$\sum\{c_p : z_p \in \bar{D}_t^\gamma\} = 0$．従て，

$$\sum\{c_p : z_p \in \bar{D}_{2j,l(s)}\} = \sum\{c_p : \bar{D}_{2j,l(s)} \sim \cup_{t=1}^{\beta(s)} D_t^{\gamma}\} = \beta(s) - 1 .$$

後半の等式は，$\bar{D}_{2j,l(s)} \sim \cup_{t=1}^{\beta(s)} D_t^{\gamma}$ の Euler 標数が $\beta(s)-1$ であるによる．$\beta = \sum_{s=1}^{\alpha} \beta(s)$ と置くと，此は $D_{2j-1,k} \sim \bar{D}_{2j,k}$ に含まれる A_u の形に等しい．故に，

$$\sum\{c_p : z_p \in \bar{D}_{2j-1,k} \sim D_{2j,k}\} = \alpha + \sum_{s=1}^{\alpha}(\beta(s)-1) = \beta .$$

さて，$R \subseteqq A_0 \sim \cup_{i=1}^{n} A_i$ であるから，$z \in R$ に対し $G(a_0,z) \leqq G_0(a_0,z)$ である．又，$z \in \bar{D}_{2j-1,k} \sim D_{2j,k}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ に対して，$\delta_{2j} \leqq G(a_0,z) \leqq \delta_{2j-1}$ が成立つ．此から，

$$\begin{aligned}
&\sum\{c_p G(a_0,z_p) : z_p \in \bar{D}_{2j-1,k} \sim D_{2j,k}\} \\
&\leqq \sum c_p \delta_{2j-1} = \sum c_p \delta_{2j} + \sum c_p(\delta_{2j-1} - \delta_{2j}) \\
&= \beta\,\delta_{2j} + \sum\{c_p(\delta_{2j-1}-\delta_{2j}) : z_p \in \bar{D}_{2j-1,k} \sim D_{2j,k}\} \\
&\leqq \sum\{G_0(a_0,a_p) : A_p \subseteqq \bar{D}_{2j-1,k} \sim D_{2j,k}\} + \sum\{c_p(\delta_{2j-1}-\delta_{2j}) : z_p \in \bar{D}_{2j-1,k} \sim D_{2j,k}\}
\end{aligned}$$

を得る．同様な評価が，$\bar{D}_{2j,0} \sim D_{2j-1,0}$ に対して成立つ．此等を纏めて

$$\sum\{c_p G(a_0,z_p) : z_p \in \bar{R}_{2j,0} \sim R_{2j-1,0}\} \leqq \sum\{G_0(a_0,a_p) : A_p \subseteqq \bar{R}_{2j,0} \sim R_{2j-1,0}\} + 2^{-j}$$

となるから，j に就て更に加へて

$$\sum\{c_p\, G(a_0,z_p) : z_p \in \mathfrak{Z}\} \leqq \sum_{p=n+1}^{\infty} G_0(a_0,a_p) + 1 < \infty$$

を得る．グリーン函数の対称性と Harnack 不等式を使って定理を得る．

此定理から，

$$g(z) = exp\left(-\sum_{z_p \in \mathfrak{Z}} c_p\, G(z_p,z)\right)$$

は R 上の有界な l.a.m. であって，z_p に於て重複度 c_p の零点を持つ事が分る。

<u>補題 7.3.</u> 函数列 $\{B_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H^{\infty}(R)$ と正整数列 $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots$ で次の性質を持つものが存在する．(a) 各 j に対して，$|B_j|$ の内部因子 $|B_j|_I$ は $\exp(-\sum_{p \geq \sigma(j)} c_p G(z_p, z))$ である．(b) β 位相に関して B_j は収束し，其極限を B とすれば，B は β 生成元である．

証明. R 上の l.m.m. u の指標とは，$u = |f|$ なる乗法的有理型函数 f の指標の事を云ふ．さて，$C_j = \exp(-\sum_{p \geq j} c_p G(z_p, z))$ の指標を θ_j と置くと，$F_j \in H^{\infty}(R)$ で $|F_j| = C_j \, \delta_{\theta_j^{-1}}$ を満足するものがある．（δ_θ については定理 4.5 を参照）．$\|F_j\|_\infty \leq 1 \ (j \geq 1)$ であるから，β 位相で収束する部分列 $\{F_{\sigma(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ が存在する．$B_j = F_{\sigma(j)}$, $j = 1, 2, \cdots$, $B = \lim_{j\to\infty} B_j$ と置く．$\sum_{j=1}^{\infty} c_j G(z_j, z)$ は $R \sim Z$ 上で広義一様収束するから，R 上で広義一様に $\lim_{j\to\infty} \sum_{p \geq j} c_p G(z_p, z) = 0$．故に，R 上で広義一様に $C_j \to 1$．従て，β 位相に就て，$\delta_{\theta_{\sigma(j)}^{-1}} \delta_1 = \delta_{\theta_{\sigma(j)}^{-1}} = |F_{\sigma(j)}| / C_{\sigma(j)} \to |B|$．定理 4.5 (d) により，B は β 生成元である．

<u>定理 7.4.</u> R は Blaschke 領域，Γ は R の標準境界で，$R \cup \Gamma$ は調和的に完備であるとする。又，f は R 上の有理型函数で $|f| g \in B^1(R)$ なるものとする．此時，Γ 上殆んど至る処 f^* が存在して，f^* は可積分で且つ

$$f(a_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a_0, z).$$

証明. $|f|g \in B^1(R)$, $g \in B^\infty(R)$ で, $g \neq 0$ であるから, f は有界特性を持つ. 従て, Γ 上殆んど至る処 f^* が存在し, f^* は調和測度について可積分である. 実際, g は内部的だから $g^* = 1$ a.e. で, 従て $|f^*| = |f^*|g^*$ a.e. 此処で $|f|g$ は調和優函数を持つ事から, $|f^*|$ が可積分である事が知られる。

さて, $u \in H^\infty(R)$ を任意に取る. $g_j(z) = \exp\left(-\sum_{p=1}^{\sigma(j)-1} c_p G(z_p, z)\right)$, $j \geq 2$, と置く. 此時, fuB_j は R 上で有理型であり, $|fuB_j|g_j = |u|\cdot|f|\cdot g\cdot \delta_{B_{\sigma(j)}^{-1}} \in B^1(R)$ である. 故に, 定理7.1により

$$(fuB_j)(a_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)u^*(z)B_j^*(z)\,\delta G(a_0, z).$$

補題7.3により, $B_j \to B$ (β 位相) だから, $\sigma\left(L^\infty\left(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0,z)\right), L^1\left(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0,z)\right)\right)$ に関して $B_j^* \to B^*$ である. $j \to \infty$ として.

$$(fuB)(a_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)u^*(z)B^*(z)\,\delta G(a_0, z).$$

B は β 生成元であるから, $H^\infty(R)$ の中の net $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ で, $u_\alpha B \to 1$ (β 位相) なるものが存在する. 故に

$$f(a_0) = \lim_\alpha (fu_\alpha B)(a_0) = \lim_\alpha -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)u_\alpha^*(z)B^*(z)\,\delta G(a_0, z)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f^*(z)\,\delta G(a_0, z).$$

次に, コーシーの定理の逆及至 F. and M. Rieszの定理の拡張を

証明する為に，先づグリーン函数の次の性質に注意する．

補題 7.5. $R\cup\Gamma$ を縁附きリーマン面，G を R のグリーン函数，$a_0\in R$，$\mathfrak{Z}$ を $\delta G(a_0,z)$ の零点の集合とする．$\check{R}$ を $R\cup\Gamma$ の double とし，τ を $\check{R}$ から $\check{R}$ の上への等角同型写像で $R\cup\Gamma$ を $\check{R}\sim R$ へ鏡映により写すものとし，$D=\{(a,b): a\in\check{R},\ b=a$ 又は $b=\tau(a)\}$ と置く。此時，

(a) 任意の $a\in\check{R}$ に対して，$\dfrac{\delta G(a,z)}{\delta G(a_0,z)}$ は z につき $\check{R}$ 上で有理型で，其極は $\mathfrak{Z}\cup\tau(\mathfrak{Z})\cup\{a\}\cup\{\tau(a)\}$ の中にある．

(b) $\check{R}\times(\check{R}\sim(\mathfrak{Z}\cup\tau(\mathfrak{Z})))\sim D$ 上で，$\dfrac{\delta G(a,z)}{\delta G(a_0,z)}$ は z につき正則，a につき調和，且つ二変数の函数として連續である．

(c) $(\mathfrak{Z}\cup\tau(\mathfrak{Z}))\cap\Gamma=\phi$ であり，従て $\dfrac{\delta G(a,z)}{\delta G(a_0,z)}$ は $\check{R}\times\Gamma\sim D$ 上で連續である．又，各 $z\in\Gamma$ に対して，$\dfrac{\delta G(a,z)}{\delta G(a_0,z)}$ は $\check{R}\sim\{z\}$ 上で a につき調和である．

(d)
$$\frac{\delta G(a,z)}{\delta G(a_0,z)}\begin{cases} >0 & (a,z)\in R\times\Gamma, \\ =0 & (a,z)\in\Gamma\times\check{R}\sim D, \\ <0 & (a,z)\in(\check{R}\sim(R\cup\Gamma))\times\Gamma. \end{cases}$$

(e) $\check{R}\sim\Gamma$ のコンパクト集合 K に対し，$\dfrac{\delta G(a,z)}{\delta G(a_0,z)}$ は $K\times\Gamma$ 上で有界である．

此結果を用ひて，次の結果を示す事は易しい。

補題 7.6. $R\cup\Gamma$ を縁附きリーマン面，G を R のグリーン函数，$a_0\in R$，$\mathfrak{Z}$ を $\delta G(a_0,z)$ の零点の集合とする．$z\in\mathfrak{Z}$ に対し，z

に於ける $\delta G(a_0, z)$ の零点の重複度を $c(z)$ と書く．(V, φ) を $R \sim \mathfrak{Z}$ の中の座標円板，J を V の中の長さ有限の閉曲線とし，

$$P_J(z) = \int_{\varphi(J)} \frac{\delta G(\varphi^{-1}(a), z)}{\delta G(a_0, z)}\, da, \qquad z \in (R \cup \Gamma) \sim (\mathfrak{Z} \cup \bar{V}),$$

と置く．此時，P_J は縁附きリーマン面 $(R \cup \Gamma) \sim (\mathfrak{Z} \cup \bar{V})$ 上で正則で，$(R \cup \Gamma) \sim \mathfrak{Z}$ まで解析接續出来る．P_J は Γ 上では有界，$P_J(a_0) = 0$，P_J は $R \cup \Gamma$ 上で有理型で其極は $\mathfrak{Z}$ に含まれ，$z \in \mathfrak{Z}$ に於ける極の位数は $c(z)$ を越えない．

証明．$0 < r < 1$ と開集合 W を，$J \subseteqq W \subseteqq \bar{W} \subseteqq V$ 且つ $\varphi(W) = \Delta(0, r)$ のやうに取る．又，$\check{W} = W \cup \tau(W)$ と置く．任意の $a \in R$ に対し，$\dfrac{\delta G(a, z)}{\delta G(a_0, z)}$ の極は集合 $\check{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z} \cup \tau(\mathfrak{Z}) \cup \{a\} \cup \{\tau(a)\}$ に含まれる．補題 7.5, (c) により $\check{\mathfrak{Z}} \cap \Gamma = \phi$．$\check{\mathfrak{Z}}$ は $\check{R}$ の中に集積点を持たぬから，$(R \cup \Gamma) \sim \mathfrak{Z}$ 及び $(R \cup \Gamma) \sim (\bar{V} \cup \mathfrak{Z})$ は縁附きリーマン面である．

先づ，$P_J(z)$ が $\check{R} \sim (\check{\mathfrak{Z}} \cup \check{W})$ 上で正則である事は殆んど明かである．次に，$\Delta \times \Delta \sim \{(z, z) ; z \in \Delta\}$ の上で

$$G(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(z)) = -\log|z - a| + h(a, z),$$

但し，$h(a, z)$ は z について調和で，$z = a$ は除去可能な特異点で，従て $z \in \Delta$ で調和であるとしてよい．又，$h(a, z)$ は a と z について対称である．此から，

$$\delta G(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(z)) = -\frac{dz}{z - a} + \delta h(a, z).$$

従て，$z \in \Delta$，$r < |z| < 1$，に対して，

$$\int_{\varphi(J)} \frac{\delta G(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(z))}{\delta G(a_0, \varphi^{-1}(z))} da = \int_{\varphi(J)} \frac{1}{\frac{\delta G(a_0, \varphi^{-1}(z))}{dz}} \cdot \frac{\delta h(a,z)}{dz} da$$

を得るが，右辺は Δ 全体で正則である．即ち，P_J は V 全体に解析接續出来る事になり，P_J が $(R \cup \Gamma) \sim \mathfrak{Z}$ 上で正則である事が示された．

J はコンパクトであるから，補題 7.5，(e) により

$$0 < \frac{\delta G(a,z)}{\delta G(a_0,z)} < \lambda, \qquad a \in J, \quad z \in \Gamma,$$

なる有限な定数 λ が存在する．従て，$z \in \Gamma$ に対して

$$|P_J(z)| = \left| \int_{\varphi(J)} \frac{\delta G(\varphi^{-1}(a), z)}{\delta G(a_0, z)} da \right| \leqq \lambda \cdot \mathrm{arclength}(\varphi(J))$$

が成立つ．

$P_J(a_0) = 0$ を示す為に，先づ $a_0 \in V$ とすれば，

$$P_J(a_0) = \left[\int_{\varphi(J)} \frac{1}{\frac{\delta G(a_0, \varphi^{-1}(z))}{dz}} \cdot \frac{\delta h(a,z)}{dz} da \right]_{z=\varphi(a_0)} = 0.$$

又，$a_0 \in V$ ならば，

$$P_J(a_0) = \int_{\varphi(J)} \left[\frac{\delta G(\varphi^{-1}(a), z)}{\delta G(a_0, z)} \right]_{z=a_0} da = \int_{\varphi(J)} 0 \cdot da = 0.$$

補題の最後の部分は明かである．

<u>定理 7.7.</u> R を Blaschke 領域，Γ を R の標準境界で，$R \cup \Gamma$ は調和的に完備であるとする．$a_0 \in R$ とし，$\delta G(a_0, z)$ の相異なる零点の集合を $\mathfrak{Z} = \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$，$z_j$ の位数を c_j と書く．又，$g(z) = \exp(-\sum_{j=1}^{\infty} c_j G(z_j, z))$ と置く．今，$u^* \in L^1(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0, z))$ は

次の性質を持つと假定する：hがRの有理型函数で，$|h|g \in B^\infty(R)$ 且つ $h(a_0)=0$ ならば，$\int_\Gamma h^*(z)u^*(z)\delta G(a_0,z)=0$．此時，$f\in H^1(R)$ で $u^*=f^*$ a.e. on Γ なるものが存在する。

証明、$a\in R$ に対し

$$f(a)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma u^*(z)\delta G(a,z)$$

と置き，fが定理の條件を満足する事を示す。$\Delta(b,r)\subseteq\overline{\Delta(b,r)}\subseteq R\sim Z$ を満足する円板$\Delta(b,r)$を任意に取る。$\Delta(b,r)$に含まれる長さ有限な閉曲線をJとすれば，Fubini の定理により

$$\int_J f(a)\,da=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma u^*(z)\left[\int_J \delta G(a,z)\,da\right]$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma u^*(z)\left[\int_J \frac{\delta G(a,z)}{\delta G(a_0,z)}\,da\right]\delta G(a_0,z)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma u^*(z)\,P_J(z)\,\delta G(a_0,z).$$

さて，補題 7.6 により，P_JはR上で有理型でz_jに位数が高々c_jの極を持ち，$P_J(a_0)=0$を満足する事が分る。我々は，$|P_J(z)|g\in B^\infty(R)$を証明しよう。$\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$を狭義の単調減少正数列で$0$に收束するものとし，而も全ての$j$に対して，$\{z\in R:\ G(a_0,z)=\varepsilon_j\}\cap Z=\phi$であるとする。$R_j=\{z\in R:\ G(a_0,z)>\varepsilon_j\}$ $j=1,2,\cdots$，と置けば，R_jは解析的曲線で囲まれたJordan領域であって，$\bar{R}_j\subseteq R_{j+1}$ 且つ $\bigcup_{j=1}^\infty R_j=R$を満足する。我々は更に全ての$j$に対し，$\overline{\Delta(b,r)}\subseteq R_j$と假定しても一般性を失はない。補題 7.5,(e)により，J,a_0,Rのみによって決定される有限な

定数 λ で, $0 < \dfrac{\delta g_j(a,z)}{\delta g_j(a_0,z)} \leqq \lambda \quad (a \in J,\ z \in \partial R_j,\ j \geqq 1)$ を満足するものが存在する事が分る。其処で,

$$P_J^{(j)}(z) = \int_J \frac{\delta g_j(a,z)}{\delta g_j(a_0,z)}\, da$$

と置けば, $z \in \partial R_j$ に対し $|P_J^{(j)}(z)| \leqq \lambda \cdot length(J)$ を得る。$R \cup \Gamma$ 上では $g(z) \leqq 1$ であるから,

(5) $$|P_J^{(j)}(z)|\, g(z) \leqq \lambda \cdot length(J), \qquad z \in \partial R_j .$$

一方, $g_j(a_0,z) = G(a_0,z) - \varepsilon_j \quad (z \in R_j)$ は明かであるから, $\delta g_j(a_0,z) = \delta G(a_0,z) \quad (z \in R_j)$ を得る. 従て, $|P_J^{(j)}(z)|\, g(z)$ は R_j 上の l. a. m. で, $\overline{R}_j$ 上で連續である. 最大値の原理を使へば, (5) が $\overline{R}_j$ 全体で成立つ事が分る。$\delta g_j(a,z)$ は $R \times R \sim \{(a,a) ; a \in R\}$ 上で広義一様に $\delta G(a,z)$ に收束するから, $P_J^{(j)}(z)$ は $R \sim (\mathfrak{Z} \cup \overline{\Delta(b,r)})$ 上で広義一様に $P_J(z)$ に收束する。従て, (5) から $R \sim (\mathfrak{Z} \cup \overline{\Delta(b,r)})$ 上で $|P_J(z)|\, g(z) \leqq \lambda \cdot length(J)$ が成立つ。最大値の原理を用ひれば, 此不等式が R 上至る処成立つ事になる. 故に, $|P_J(z)|\, g(z)$ は $B^{\infty}(R)$ に属する.

故に, u^* に関する假定から, $\int_J f(a)\, da = 0$ を得る. J は任意であるから, Morera の定理により, f は $R \sim \mathfrak{Z}$ で正則である。一方, f の定義から分るやうに, f は R 上で調和で従て連續である. 故に f は特異点を有しない. 定理 6.6 により, $f \in H^1(R)$ 且つ Γ 上で $f^* = u^*$ a. e. である.

§8. 定理3.4の証明.

先づ，外部的函数に関する性質を少し述べる.

定理8.1. $f\in B^p(R)$, $1\leqq p\leqq\infty$, とする時，fが外部的である為の條件は，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset B^{\infty}(R)$で$\{ff_n\}_{n=1}^{\infty}$は$B^p(R)$で有界で且つ，R上の各点で，$ff_n\to 1$なるものが存在する事である.

証明. 先づ，$f\in B^p(R)$が外部的であると假定する. $u=-\log f$と置けば，uは外部的だから，$u_n=u\wedge n$ $(n=1,2,\cdots)$は外部的で，$e^{u_n}\in B^{\infty}(R)$且つ$u_n\nearrow u$である. $f_n=e^{u_n}$と置くと，$ff_n=e^{-u+u_n}\leqq 1$且つ$ff_n\to 1$. 勿論，$\|ff_n\|_p\leqq 1$.

逆に，$f\in B^p(R)$に対し，定理の條件を満足する$\{f_n\}$が存在したと假定する. 今，(Δ,φ)をRの普遍被覆リーマン面とする時，$f\circ\varphi$がΔ上で外部的である事が示せればよい. 我々は，$g\in H^p(\Delta)$と$g_n\in H^{\infty}(\Delta)$を，$f\circ\varphi=|g|$，$f_n\circ\varphi=|g_n|$と取る.

此処で，先づ$1<p<\infty$とする. $H^p(\Delta)$の有界集合は弱位相で相対コンパクトであるから，必要ならば部分列を取る事により，$\{gg_n\}$は$H^p(\Delta)$で弱収束であるとしてよい. 其極限をhと書くと，假定からΔ上で$|h|=1$. 從て，hは絶対値1の定数である. 正則函数gの内部因子(inner factor)をqとすると，$qH^p(\Delta)$は弱位相で閉ぢて居り，全てのgg_nを含むから，hを含む. 然るに，hは定数だから，qは定数となり，gは

外部的である事が分る。

$p=\infty$ の時は，$H^\infty(\Delta)$ の有界集合が $\sigma(H^\infty(\Delta), L^1(\partial\Delta))$ 位相に関して相対コンパクトな事を用ひて，上と同様に証明される。

最後に $p=1$ を假定する。我々は，$g(0)>0$，$g_n(0)>0$，且つ Δ の各点で $gg_n\to 1$ と假定しても一般性を失はない。さて，g は Δ 上で零点を持たないから，$k^2=g$，$k(0)>0$ なる Δ 上の正則函数が存在する。又，g_n の Blaschke 因子を B_n とすると，g_n/B_n は Δ 上で零点を持たないから，$k_n^2=g_n/B_n$ なる Δ 上の正則函数 k_n が存在する。此処でも，$B_n(0)>0$，$k_n(0)>0$ と假定する事が出来る。定理の假定から，$\|ff_n\|_{1,a_0}\leqq M$ なる定数 M が存在する。今，$\varphi(0)=a_0$ と選んで置けば，$\|kk_n\|_2=\|gg_n\|_1^{1/2}=\|ff_n\|_{1,a_0}^{1/2}\leqq\sqrt{M}$。又，明かに $\|B_n\|_2=1$ である。必要ならば部分列へ移る事により，$\{kk_n\}$ 及び $\{B_n\}$ は $H^2(\Delta)$ で弱収束するとしてよい。夫々の極限を h，B と置けば，Δ の各点 z で $k(z)k_n(z)\longrightarrow h(z)$，$B_n(z)\longrightarrow B(z)$。従て，

$$(h^2B)(z)=\lim_{n\to\infty}(k^2k_n^2B_n)(z)=\lim_{n\to\infty}(gg_n)(z)=1.$$

此は，$h^{-2}=B\in H^2(\Delta)$ を示す。$h\in H^2(\Delta)$ でもあるから，系2.5により，$\log|h|=(\log|h|)\vee 0+(\log|h|)\wedge 0=(\log|h|)\vee 0-\frac{1}{2}((\log|h|^{-2})\vee 0)\in\mathcal{Q}(R)$。故に，$h$ は外部的である。h は $k\cdot H^\infty(\Delta)$ の $H^2(\Delta)$ での閉包に含まれるから，k も外部的，従て $g=k^2$ も外部的である。故に，全ての場合に対し定理が証明された。

補題 8.2. RをBlaschke領域, $f\in H^1(R)$とする．此時, A, $g\in H^\infty(R)$, $h\in H^2(R)$で, Aとhは外部的且つ $Af=gh^2$ なるものが存在する．fが外部的の時は, $g=1$に出来る．

証明. $f\neq 0$の時のみ証明すれば充分である．$u=|f|$とし, uの外部因子u_Qの正の平方根をvとすれば, $u=u_I v^2$. 一般に我々は, R上のl.m.m. wの指標を$\theta(w)$と書き, 指標θに対し定理4.5で与へられたδ_θを$\delta(\theta)$の形に書く．此は単に記法上の便宜の為である．さて, $g\in H^\infty(R)$, $h\in H^2(R)$を $|g|=u_I\,\delta(\theta(u_I)^{-1})$, $|h|=v\,\delta(\theta(v)^{-1})$で定義する．此時, hは外部的であり, $|gh^2|=|f|\,\delta(\theta(u_I)^{-1})\,\delta(\theta(v)^{-1})^2$となるから, $A=gh^2/f$と置けば, Aは有界正則且つ外部的である．

定理 8.3. RをBlaschke領域, $f\in H^p(R)$, $1\le p\le\infty$)とする．此時, fが外部的である為の条件はfがp生成元($p=\infty$の時は, β生成元)なる事である．$f\in H^p(R)$がp生成元(p-exterior)であるとは, $f\cdot H^\infty(R)$が$H^p(R)$でノルム位相で稠密なる事を云ふ。

証明. (i) $f\in H^\infty(R)$がβ生成元であれば, $\{f_n\}\subset H^\infty(R)$を $\|ff_n\|_\infty\le M$ (Mは定数)且つ, R上の各点で, $ff_n\to 1$と取る事が出来る．定理8.1によりfは外部的である．

(ii) $f\in H^p(R)$, $1\le p<\infty$, がp生成元であれば, $\{f_n\}\subset H^\infty(R)$を $\|ff_n-1\|_{p,a_0}\to 0$と取れる．従て, $\{ff_n\}$はノルム有界で

1!!!

R上の各点で $(ff_n)(z)\to 1$．故に定理 8.1 が適用される．

(iii) $f\in H^p(R)$ が外部的であると假定する．定理 8.1 により，$\{u_n\}\subset B^\infty(R)$ を $\{|f|u_n\}$ は $B^p(R)$ でノルム有界で，Rの各点で $|f|u_n\to 1$ のやうに取れる．其処で，$g_n\in H^\infty(R)$ を $u_n\delta(\theta(u_n)^{-1})=|g_n|$ のやうに取る．此時，$\|fg_n\|_{p,a_0}=\||f|u_n\delta(\theta(u_n)^{-1})\|_{p,a_0}\leqq M$ （M は n に無関係の定数）．

先づ，$p=\infty$ とする．$\{fg_n\}$ は $H^\infty(R)$ でノルム有界だから，β位相で收束する部分列 $\{fg_{n(\sigma)}\}_{\sigma=1}^\infty$ を持つ．極限を h と書けば，各点毎に $|h|=\lim_{\sigma\to\infty}|fg_{n(\sigma)}|=\lim_{\sigma\to\infty}\delta(\theta(u_{n(\sigma)})^{-1})$ であるから，定理 4.5, (d) により，h は β 生成元である．從て，f も β 生成元である．

次に，$1<p<\infty$ とすると，$\{fg_n\}$ は $H^p(R)$ で弱收束する部分列 $\{fg_{n(\sigma)}\}$ を含む．其極限を $h\in H^p(R)$ とする．R上各点毎に，$|h(z)|=\lim_{\sigma\to\infty}|(fg_{n(\sigma)})(z)|=\lim_{\sigma\to\infty}\delta(\theta(u_{n(\sigma)})^{-1})\leqq 1$ を得るから，$h\in H^\infty(R)$ となり，定理 4.5, (d) により h は β 生成元である．從て，$\{h_n\}\subset H^\infty(R)$ で，$\|hh_n\|_\infty\leqq M'$ （M' は定数）且つ，R上各点で，$hh_n\to 1$ なるものが存在する．$\{hh_n\}$ は $H^p(R)$ で有界だから，弱收束部分列 $\{hh_{n'(\sigma)}\}$ を含む．此極限は明かに 1 である．$[fH^\infty(R)]_p$ （$[\ ]_p$ は H^p 閉包）は弱位相で閉ぢて居り，從て，$h\in[fH^\infty(R)]_p$ だから $hh_n\in[fH^\infty(R)]_p$ となり，$1\in[fH^\infty(R)]_p$．故に，$[fH^\infty(R)]_p\geqq[H^\infty(R)]_p=H^p(R)$，

即ち，f は p 生成元である．（但し，$H^p(R)=[H^\infty(R)]_p$ は後で示す）．

最後に，$p=1$ と假定する．補題 8.2 により，外部的な函数 $A\in H^\infty(R)$，$h\in H^2(R)$ を $Af=h^2$ のやうに取れる．既に示した如く，A は β 生成元，h は 2 生成元である．さて，任意に $f_1\in H^1(R)$ を取り，此 f_1 に対して補題 8.2 により，A_1, g_1, h_1 を $A_1f_1=g_1h_1^2$ のやうに取る．此時，$\{k_n\},\{l_n\}\subset H^\infty(R)$ を $hk_n\to g_1h_1$, $hl_n\to h_1$ が $H^2(R)$ で成立つやうに取れる．従て，$Afk_nl_n=(hk_n)(hl_n)\to g_1h_1^2=A_1f_1$ が $H^1(R)$ で成立つ．A_1 は β 生成元であり，$A_1f_1\in[fH^\infty(R)]_1$ であるから，次の補題により，$f_1\in[fH^\infty(R)]_1$．f_1 は任意であるから，$[fH^\infty(R)]_1=H^1(R)$．故に，f は 1-生成元である．此で証明は終った．

<u>補題 8.4.</u> $a\in H^\infty(R)$ を β 生成元とする．$1\leqq p<\infty$ とし，J を $H^p(R)$ の閉 $H^\infty(R)$ 部分加群とする．此時，$f\in H^p(R)$ が $af\in J$ を満足すれば，$f\in J$．

証明．$\mathfrak{m}=\{b\in H^\infty(R): bf\in J\}$ と置けば，$\mathfrak{m}$ は a を含む $H^\infty(R)$ のイデアルである．補題を示す為には，$\mathfrak{m}$ が β 位相で閉ぢてゐる事を言へば充分である．さて，$\{b_n\}\subset\mathfrak{m}$ を β 收束列で，$b\in H^\infty(R)$ を其極限とする．

もし，$1<p<\infty$ ならば，$\{b_nf\}$ は $H^p(R)$ で有界であるから，弱收束部分列 $\{b_{n(\nu)}f\}$ が存在する．極限を $k\in H^p(R)$ とすると，

$z \in R$ に対し，$b_{n(\sigma)}(z) f(z) \to k(z)$．即ち，$k = bf$．J は弱位相で閉ぢてゐるから，$bf = k \in J$．故に，$b \in \mathfrak{m}$．

次に $p = 1$ とする．(Δ, φ) を R の普遍被覆面とし，$\tilde{b}_n = b_n \circ \varphi$，$\tilde{b} = b \circ \varphi$，$\tilde{f} = f \circ \varphi$ と置く。Δ 上の H^p 理論から，$\tilde{f} = q \cdot F^2$（但し，$q \in H^\infty(\Delta)$ は内部的，$F \in H^2(\Delta)$ は外部的である）と書かれる．今，$\{\tilde{b}_n\}$ の部分列 $\{\tilde{b}_{n(\sigma)}\}$ を，$\tilde{b}_{n(\sigma)} qF \to \tilde{b} qF$ が $H^2(\Delta)$ で弱収束なるやうに選ぶ．$u^* \in L^\infty(\partial\Delta)$ に対し，$F^* u^* \in L^2(\partial\Delta)$ だから，

$$\int_0^{2\pi} ((\tilde{b}_{n(\sigma)} \tilde{f})^* - (\tilde{b}\tilde{f})^*)(e^{it})\, u^*(e^{it})\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} ((\tilde{b}_{n(\sigma)} q F)^* - (\tilde{b} q F)^*)(e^{it})\, F^*(e^{it})\, u^*(e^{it})\, dt \to 0 .$$

即ち，$\{\tilde{b}_{n(\sigma)} \tilde{f}\}$ は $H^1(\Delta)$ で $\tilde{b}\tilde{f}$ に弱収束する．$\tilde{J} = J \circ \varphi = \{h \circ \varphi : h \in J\}$ はノルム位相で閉ぢてゐるから，$H^1(\Delta)$ の弱位相でも閉ぢてゐる。故に，$\tilde{b}\tilde{f} \in \tilde{J}$ となる．従て，$bf \in J$ となり，矢張り，$b \in \mathfrak{m}$ となり証明が終った。

<u>定理 8.5</u>　R を Blaschke 領域とすれば，$1 \leqq p < \infty$ に対して $H^p(R) = [H^\infty(R)]_p$.

証明．$H^p(R) \subseteqq [H^\infty(R)]_p$ のみを示せば充分である．先づ，$1 < p < \infty$ とし，$f \in H^p(R)$ を任意に取る．$f \neq 0$ としてよい．$|f| = I \cdot F$ を $|f|$ の内部因子 I と外部因子 F への分解とする。此時 $s = -\log F$，$u = s \vee 0$，$v = s \wedge 0$ と置けば，系 2.5 により，$u, v \in \mathcal{Q}(R)$．$n = 1, 2, \cdots$ に対し，$u_n = u \wedge n$，$v_n = v \vee (-n)$ と

置くと，R上各点毎に $exp(-(u_n+v_n)) \to e^{-s} = F$. $exp(-(u_n+v_n)) \leqq exp(-v_n) \leqq exp(-v)$ より，

$$\| exp(-(u_n+v_n)) \|_{p,a_0} \leqq \| exp(-v) \|_{p,a_0} \leqq (1+\|F\|_{p,a_0}^p)^{1/p} = (1+\|f\|_{p,a_0}^p)^{1/p}$$

を得る．第二の不等式は普遍被覆面 Δ に移して見れば直ぐ分る． $\delta_I = \delta(\theta(I)^{-1})$ とし， $\delta_n = \delta((\theta(exp(-(u_n+v_n))))^{-1})$, $n=1,2,\cdots$ と置き，更に $h, g_n \in H^\infty(R)$ を夫々 $|h| = I \cdot \delta_I$, $|g_n| = exp(-(u_n+v_n)) \cdot \delta_n$ で定義する． $\|\delta_n\|_\infty \leqq 1$ であるから， $\|g_n\|_{p,a_0} \leqq \|exp(-(u_n+v_n))\|_{p,a_0} \leqq (1+\|f\|_{p,a_0}^p)^{1/p}$ となり，

$$\| h g_n \|_{p,a_0} \leqq \|h\|_\infty (1+\|f\|_{p,a_0}^p)^{1/p}, \quad n=1,2,\cdots .$$

従て， $\{hg_n\}$ は $H^p(R)$ で弱収束する部分列 $\{hg_{n(\sigma)}\}_{\sigma=1}^\infty$ を含む． $g_\infty = \lim_{\sigma\to\infty} hg_{n(\sigma)}$ と置く． $[H^\infty(R)]_p$ は弱位相でも閉ぢてゐるから， $g_\infty \in [H^\infty(R)]_p$ である．R上の各点で， $h(z)g_{n(\sigma)}(z) \to g_\infty(z)$ であるから，各点収束の意味で

$$\lim_{\sigma\to\infty} \delta_I \delta_{n(\sigma)} = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{I\cdot\delta_I \cdot exp(-(u_{n(\sigma)}+v_{n(\sigma)}))\cdot \delta_{n(\sigma)}}{I\cdot exp(-(u_{n(\sigma)}+v_{n(\sigma)}))}$$
$$= \lim_{\sigma\to\infty} \frac{|h\cdot g_{n(\sigma)}|}{I\cdot exp(-(u_{n(\sigma)}+v_{n(\sigma)}))} = \left|\frac{g_\infty}{f}\right|.$$

此処で， $k = g_\infty / f$ と置けば， $k \in H^\infty(R)$ であるが，更に定理4.5,(d)により β 生成元である． $kf = g_\infty \in [H^\infty(R)]_p$ だから，補題8.4によって， $f \in [H^\infty(R)]_p$. 故に， $H^p(R) \subseteqq [H^\infty(R)]_p$.

次に， $f \in H^1(R)$, $f \neq 0$, とする．補題8.2により， $Af = gh^2$ と書ける．但し， $A, g \in H^\infty(R)$, $h \in H^2(R)$ で， A, h は外部的であ

る．定理 8.3 の証明の済んだ部分から，A は β 生成元である事が分る．$[H^\infty(R)]_2 = H^2(R)$ であるから，$\{u_n\}, \{v_n\} \subset H^\infty(R)$ であって $H^2(R)$ のノルム位相で $u_n \to h$, $v_n \to gh$ なるものが存在する．従て，$u_n v_n \to gh^2$ が $H^1(R)$ で成立ち，$Af \in [H^\infty(R)]_1$ が示された．再び，補題 8.4 により $f \in [H^\infty(R)]_1$．故に，$H^1(R) \subseteq [H^\infty(R)]_1$ を得る．

定理 8.6. R を Blaschke 領域とし，$1 \leqq p \leqq \infty$ とする．$h \in H^p(R)$ とし，h の内部因子（即ち，$|h|$ の内部因子（定理 1.5 参照））を I と書く．此時，$[h \cdot H^\infty(R)]_p = H^p(I; R)$ である．但し，$p = \infty$ の時は，ノルム閉包 $[\ ]_\infty$ の代りに β 位相による閉包 $[\ ]_\beta$ を考へるものとする．

証明．$H^p(I;R) \subseteq [h \cdot H^\infty(R)]_p$ （$p=\infty$ の時は，β 閉包）を示せば充分である．任意に $f \in H^p(I;R)$ を取る．$u = |h|_Q$，$v = |f|/I$ と置けば，$u, v \in B^p(R)$ である．此処で，$h_I \in H^\infty(R)$, $k_u, k_v \in H^p(R)$ を，$|h_I| = I \cdot \delta(\theta(I)^{-1})$，$|k_u| = u \cdot \delta(\theta(u)^{-1})$，$|k_v| = v \cdot \delta(\theta(v)^{-1})$ で定義する．k_u は外部的であるから，定理 8.3 により p 生成元（$p=\infty$ の時は，β 生成元）である．即ち，$k_v \in H^p(R) = [k_u H^\infty(R)]_p$．$h_I$ を掛けて，$h_I k_v \in [h_I k_u H^\infty(R)]_p$．此処で，$|h_I k_v| = I \cdot \delta(\theta(I)^{-1}) \cdot v \cdot \delta(\theta(v)^{-1}) = |f| \cdot \delta(\theta(I)^{-1})\delta(\theta(v)^{-1})$ であるから，$h_1 = h_I k_v / f$ と置けば，$h_1 \in H^\infty(R)$ で且つ β 生成元である．同様にして，$h_I k_u / h$ （$= h_2$ と置く）も $H^\infty(R)$ に属する β 生成元で

である。此から，$fh_1 = h_I k_v \in [h_I k_u H^\infty(R)]_p = [h h_2 H^\infty(R)]_p \subseteqq$ $[h H^\infty(R)]_p$（$p=\infty$ の時は，$[\ ]_p$ を $[\ ]_\beta$ で置き換へる）を得る。h_1 は β 生成元であるから，$1 \leqq p < \infty$ ならば，補題 8.4 により，$f \in [h H^\infty(R)]_p$. $p=\infty$ の時は，β 生成元の定義から $f \in [h H^\infty(R)]_\beta$ を得る。故に，$H^p(I;R) \subseteqq [h H^\infty(R)]_p$（$p=\infty$ の時は，$[h H^\infty(R)]_\beta$）となり，定理が証明された。

<u>定理 3.4 の証明.</u>

$\mathcal{M}$ を $H^p(R)$ の $H^\infty(R)$ 部分加群で，$1 \leqq p < \infty$ ならばノルム閉集合，$p=\infty$ ならば β 閉集合なるものとする。系 2.6 により，任意の $f\ (\neq 0) \in \mathcal{M}$ に対して，$P_I(\log|f|) \leqq 0$. $\mathcal{I}(R)$ は完備であるから，$u_I = \vee\{P_I(\log|f|) : f \in \mathcal{M}\}$ が存在して，$\mathcal{I}(R)$ に含まれる。$I = \exp(u_I)$ と置くと，I は内部的 $l.a.m.$ で，全ての $f \in \mathcal{M}$ に対して，$|f|/I \in B^p(R)$ を得る。故に $\mathcal{M} \subseteqq H^p(I;R)$.

逆の包含関係を示す為に，$\mathcal{M}$ を $h^p(R)$ の閉部分空間と看做す事にする。$p=\infty$ の時は β 位相を考へる。そして，定理 6.7 を適用する。さて，$p^{-1}+q^{-1}=1$ とし，$s^* \in L^q(-\frac{1}{2\pi i}\delta G(a_0,z))$ が全ての $f \in \mathcal{M}$ に対して，$\int_T f^*(z) s^*(z) \delta G(a_0,z) = 0$ を満足するものとする。g を定理 7.2 の証明の後で定義された函数とし，$B \in H^\infty(R)$ を，$|B| = g \cdot \delta(\theta(g)^{-1})$ で定義する。

今，u を R 上の有理型函数で $g\cdot|u| \in B^\infty(R)$ なるものとすれば，$Bu \in H^\infty(R)$ となり，任意の $f \in \mathcal{M}$ に対し $Buf \in \mathcal{M}$. s^* の

性質から，$\int_{\Gamma} B^*(z)u^*(z)f^*(z)s^*(z)\,\delta G(a_0,z)=0$．定理7.7により，$M_f\in H^1(R)$で，$M_f(a_0)=0$且つ$(M_f)^*=B^*f^*s^*$ a.e. を満足するものが存在する．M_f/fは有界特性を持つ有理型函数であるから，境界値によって決定される．$\left(\frac{M_f}{f}\right)^*=B^*s^*$は$f$の選び方に無関係であるから，$M_f/f$も同様である．従て，$M=M_f/f$と置く事が出来る．更に，$M/B=s$と置くと，$s$は$R$上で有理型で，$s^*$は$s$の境界値で，$Bfs=M_f\in H^1(R)$且つ$(Bfs)(a_0)=0$が任意の$f\in\mathfrak{M}$に対して成立つ。

$M_+=\exp((\log|M|)\wedge 0)$，$M_-=\exp(-((\log|M|)\vee 0))$と置けば，$M_\pm\in B^\infty(R)$且つ$|M|=M_+/M_-$である．其処で，$h\in H^\infty(R)$を

$$|h|=I\cdot\delta(\theta(I)^{-1})\cdot(M_-)_Q\cdot\delta(\theta((M_-)_Q)^{-1})\cdot\delta(\theta(g))\cdot\delta(\theta(g)^{-1})$$

で定義すれば，任意の$f\in\mathfrak{M}$に対して$Mf=M_f\in H^1(R)$であったから，$(M_+)_I|f|_I/(M_-)_I=|M|_I|f|_I=|M_f|_I\in B^\infty(R)$を得る．$(M_+)_I$と$(M_-)_I$は共通な因子を持たないから，$|f|_I/(M_-)_I\in B^\infty(R)$でなければならない．$f\in\mathfrak{M}$は任意であるから，$I/(M_-)_I\in B^\infty(R)$を得る．従て，$g|sh|=g|Mh/B|\in B^\infty(R)$．

更に，$(sh)(a_0)=0$である．何となれば，或$f\in\mathfrak{M}$に対して$f(a_0)\neq 0$ならば，$M(a_0)=\dfrac{M_f(a_0)}{f(a_0)}=0$となり，$s(a_0)=\dfrac{M(a_0)}{B(a_0)}=0$を得る．従て，$(sh)(a_0)=s(a_0)h(a_0)=0$．一方，全ての$f\in\mathfrak{M}$に対して$f(a_0)=0$ならば，定理1.4により$\log|f|$と$\log(|f|_I)$が同じ特異性を持つ事から，$|f|_I(a_0)=0$となり，$I(a_0)=0$．

従て，$h(a_0)=0$ となり，$(sh)(a_0)=0$．

さて，$f\in H^\infty(R)$ を任意に取ると，shf は R 上で有理型で；$g|shf|=g|sh||f|\in B^\infty(R)\subseteq B^1(R)$。定理 7.4 により，

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (s^*h^*f^*)(z)\,\delta G(a_0,z)=(shf)(a_0)=0.$$

s^*は任意であるから，$hf\in\mathfrak{M}$，即ち，$h\cdot H^\infty(R)\subseteq\mathfrak{M}$ を得る．定理 8.6 により，$H^p(I;R)\subseteq\mathfrak{M}$．故に，$\mathfrak{M}=H^p(I;R)$．

参　考　文　献

[1] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. 81 (1949), 239–255.

[2] C. Constantinescu – A. Cornea, Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, 1963.

[3] T. Gamelin, Uniform algebras, Prentice-Hall, 1969.

[4] 荷見守助, Shift-invariant subspace について，数学, 17 (1966), 214–224.

[5] C. W. Neville, Ideals and submodules of analytic functions on infinitely connected plane domains, Thesis, University of Illinois, 1971, vii + 514 pp.

[6] A. Pfluger, Theorie der Riemannschen Flächen, Springer, 1957.

[7] L. Rubel - A. Shields, The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 16 (1966), 235-277.

[8] M. Voichick, Ideals and invariant subspaces of analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 11 (1964), 493-512.